

Programme de colle S10

21 au 25 novembre 2022

La colle débutera par une question de cours (voir à la fin du programme).

AL2 Calcul matriciel

1. Ensemble des matrices

- ▷ Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R} . Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- ▷ Matrices particulières : matrice nulle $0_{n,p}$, matrice identité I_n , matrices diagonales, matrices triangulaires.

2. Opérations matricielles

- ▷ Addition, multiplication par un réel, combinaison linéaire.
- ▷ Produit matriciel.
- ▷ Transposée. Transposée d'une combinaison linéaire, d'un produit.
- ▷ Puissances entières positives d'une matrices carrée. Formule du binôme matricielle.

3. Matrices inversibles

- ▷ Définition. Simplification de la définition en : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$. Dans ce cas, $A^{-1} = B$.
- ▷ Puissances entières négatives d'une matrice inversible. Inverse d'un produit de matrices inversibles, inverse de la tranposée d'une matrice inversible.
- ▷ Cas particuliers : I_n , matrices 2×2 , matrices diagonales, matrices triangulaires (pas de formule pour l'inverse dans le cas des matrices triangulaires).
- ▷ Lien systèmes/matrices. Démontrer que A est inversible ou non par résolution de $AX = B$.

Méthodes du chapitre

- ▷ Réaliser un calcul matriciel : combinaison linéaire et/ou produit.
- ▷ Calculer les premières puissances d'une matrice carrées.
- ▷ Donner (directement) les puissances d'une matrice diagonale.
- ▷ Démontrer une formule pour A^n par récurrence.
- ▷ Démontrer qu'une matrice est inversible. En particulier :
 - connaître les cas particuliers ;
 - à partir d'une relation polynômiale en A , trouver B telle que $AB = I_n$.
- ▷ Méthode plus difficile : utiliser la formule du binôme de Newton (avec indication de la décomposition $M = A + B$).

Info boucles for et while

1. Déjà vu : print, numpy, numpy.random (fonction randint), instruction if.
2. range, boucles for et while

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Toute définition, tout résultat et tout énoncé de théorème doit être connu et peut faire l'objet d'une question de cours.
- [Exemple du cours] Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Conjecture la forme de J^n pour $n \geq 1$ puis démontrer le résultat par récurrence.
- [Exemple du cours] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que $A^3 - 3A - 2I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .
- [Démonstration] Justifier que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- [Informatique] Écrire un programme python calculant une somme de la forme $\sum_{k=p}^q u_k$, ou un

produit de la forme $\prod_{k=p}^q u_k$.

Exemples vus en cours : $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2}$ et $n!$ (pour $n \in \mathbb{N}$ donné).