DEVOIR SURVEILLÉ 5

Vendredi 3 mars 2023 – 4h
Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
La présentation sera prise en compte dans la notation (comme d'habitude, on encadre les résultats).

Exercice 1
Applications directes du cours

1. On considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$.
   (a) Montrer que -1 est racine de P.
   (b) En déduire une factorisation complète de P.
2. Montrer que l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-z, y+z) \end{array}$ est bijective et déterminer son application réciproque f^{-1}.
3. Justifier que l'application $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n+1 \end{array}$ est injective mais pas surjective.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Partie 1 - Étude de f

1. Écrire une fonction python qui, étant donné un réel $x > -1$, renvoie la valeur de $f(x)$.
2. Justifier que f est continue sur $]-1,+\infty[$.
3. Justifier que f est prolongeable par continuité en -1. On notera toujours f le prolongement. Préciser la valeur posée pour $f(-1)$.
4. Étudier la limite de f en $+\infty$.
5. On note $g : x \mapsto \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.
   (a) Justifier que g est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ puis étudier le signe de $g'(x)$ sur $]-1,+\infty[$.
   (b) Justifier que $g(x) > 0$ si $x \neq 0$.
6. Justifier que f est strictement croissante sur $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. *On admettra qu'elle est strictement croissante sur* $[-1,+\infty[$ *par continuité.*
   Dresser le tableau de variation de f.

Partie 2 - Étude d'une suite implicite

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution sur $]-1,+\infty[$ que l'on notera u_n.
8. Justifier que $-1 < u_n \leqslant 0$ pour tout entier naturel n non nul.
9. Précsier la valeur de u_1.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
11. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
12. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3

On dispose d'une urne U_0 contenant deux boules noires et deux boules blanches, et d'urnes U_1, U_2, $U_3, \dots, U_n$ contenant chacune deux boules blanches ($n \geqslant 1$).

On effectue des tirages selon le protocole suivant :

- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_0, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_1.
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_1, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_2.
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_2, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_3, et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne U_n après y avoir introduit les boules piochées dans l'urne U_{n-1}, mais avant de procéder au tirage dans U_n.

1. Simulation de l'expérience.
   (a) Recopier et compléter la fonction `tirage(N,B)` qui réalise deux tirages sans remise dans une urne contenant N boules noires et B boules blanches. Cette fonction doit renvoyer le nombre de boules noires piochées.
   On choisira une numéroration des boules, préciser laquelle sur la copie.

```
import numpy.random as rd # inutile de recopier cette ligne

def tirage(N,B):
    k = 0
    for i in range(...):
        alea = rd.randint(...)
        if ... :
            k = ...
            N = N-1
        else:
            B = B-1
    return k
```

   (b) Recopier et compléter la fonction `simulation(n)` qui, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, simule l'expérience aléatoire totale et renvoie la valeur de X_n.

```
def simulation(n):
    N = 2
    B = 2
    for i in range(...):
        X =  ...
        N = ...
        B = ...
    return X
```

Pour la suite de l'excercice, on utilisera les événements suivants :

- $B1_k$: « la première boule tirée dans l'urne U_k est blanche ».
- $B2_k$: « la deuxième boule tirée dans l'urne U_k est blanche ».
- $N1_k$: « la première boule tirée dans l'urne U_k est noire ».
- $N2_k$: « la deuxième boule tirée dans l'urne U_k est noire ».
- A_k : « on pioche deux boules noires dans l'urne U_k ».

2. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. On justifiera brièvement.
3. (a) Montrer que la loi de la variable aléatoire X_1 est donnée par :
$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}, \quad P(X_1 = 2) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}$$
   (b) Calculer l'espérance de X_1.
4. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, l'événement $[X_n = 2]$ à l'aide de certains des événements A_k et en déduire que $P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.
5. (a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer
$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1), \quad P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) \quad \text{et} \quad P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1).$$
   (b) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'on a :
$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{2}{3} P(X_n = 2)$$
   (c) Montrer ensuite par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
6. Donner la valeur de $P(X_n = 0)$ en fonction de n.
7. Calculer, pour tout entier naturel n, l'espérance de X_n.

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies, pour tout réel x par

$$f(x) = (x^3 + x^2 - x - 1)\,\mathrm{e}^{-x} + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

Partie 1 - Étude de f

1. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.
2. Justfier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ que l'on écrira sous une forme factorisée.
3. Dresser le tableau de variation de f.

Partie 2 - Étude du signe g

On se propose de montrer que $g(x) \leqslant 0$ pour $x \in [0, 1]$.

4. Justifier que g puis g' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puis montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-1)(x^2 - 4x - 3).$$

   On rappelle que g'' est la dérivée de g'.

5. Dresser le tableau de signe de $g''(x)$ sur $\mathbb{R}$. On justifiera que $\dfrac{4 - \sqrt{28}}{2} = 2 - \sqrt{7} < 0$.
6. Démontrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0, 1]$.
7. En déduire le tableau de signe de $g'(x)$ sur $[0, 1]$ puis le signe de $g(x)$ sur $[0, 1]$.
8. Quelles sont les solutions de l'équation $g(x) = 0$?

Partie 3 - Étude d'une suite

On pensera à utiliser les parties précédentes.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

9. Écrire un programme python qui crée la liste $[u_0, u_1, \ldots, u_{100}]$.
10. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
11. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. On précisera son sens de variation.
12. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.