DEVOIR SURVEILLÉ 5 – CORRIGÉ

Exercice 1

1. On considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$.

   (a) $P(-1) = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$ donc $\boxed{-1 \text{ est racine de } P.}$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait donc que $(x+1)$ divise $P(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 & x+1 \\ \cline{2-2} -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 + x - 6 \\ \hline -x^2 - 5x - 5 & \\ -(x^2 + x) & \\ \hline -6x - 6 & \\ -(-6x - 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

   Donc $P(x) = (x+1)Q(x)$ avec $Q(x) = 2x^2 + x - 6$. Factorisons $Q(x)$. $\Delta(Q) = 49 > 0$. Les racines de Q sont -2 et $\frac{3}{2}$. Donc $Q(x) = 2(x+2)(x - \frac{3}{2})$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 2(x+1)(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right).}$$

2. Soient $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(u) = v \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ \boxed{x} - z = b \\ y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = a - b \\ \boxed{x} - z = b \\ \boxed{y} + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = a - b - c \\ \boxed{x} - z = b \\ \boxed{y} + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = (a - c, -a + b + 2c, a - b - c)$$

   Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, l'équation $f(u) = v$ admet une unique solution donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et ici $\boxed{f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a-c, -a+b+2c, a-b-c) \end{array}}$.

3.
   - Soient $n, n' \in \mathbb{N}$. $h(n) = h(n') \Leftrightarrow 2n + 1 = 2n' + 1 \Leftrightarrow n = n'$ donc $\boxed{h \text{ est injective}}$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. $h(n) = 2n + 1 \geqslant 1$ donc $h(n) = 0$ n'a pas de solution. Or $0 \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{h \text{ n'est pas sujective}}$.

Exercice 2

Partie 1 - Étude de f

1.
```python
import numpy as np
def f(x):
    if x == 0:
        return 1
    else:
        return x/np.log(1+x)
```

2.
   - Sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$. $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 + x$ sont continues sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ (polynomiales) et $1 + x > 0$ sur cet ensemble. De plus $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée, $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Enfin, par quotient, étant donné que $1 + x \neq 1$ donc $\ln(1+x) \neq 0$, f est continue sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
   - En 0 : par taux d'accroissement usuel, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)} = \dfrac{1}{1} = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1 = f(0)$, donc f est continue en 0.
   - Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur }]-1, +\infty[.}$

3. $\lim\limits_{x \to -1} (1 + x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ dponc $\lim\limits_{x \to -1} \ln(1+x) = -\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } -1}$ en posant $\boxed{f(-1) = 0.}$

4. Soit $x > 0$. Posons $X = x + 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. $f(x) = \dfrac{X - 1}{\ln(X)} = \dfrac{X}{\ln(x)} - \dfrac{1}{\ln(X)}$. Or, $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{\ln(X)} = +\infty$ par croissance comparée, donc

$$\frac{X}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(X)} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

5. On note $g : x \mapsto \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.

   (a) $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc sur $]-1,+\infty[$.
   $x \mapsto 1+x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynomiale) et ln l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ dnc par composée, $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 1+x > 0\} =]-1,+\infty[$. Donc $\boxed{g \text{ est bien définie et dérivable sur }]-1,+\infty[.}$
   Pour $x > -1$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$. Comme $(1+x)^2 > 0$, $g'(x)$ est du signe de x.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

   (b)
   - Sur $]-1,0[$, $g'(x) < 0$. Donc g y est strictement décroissante. Ainsi, $g(x) > g(0) = 0$.
   - Sur $],+\infty[$, $g'(x) > 0$. Donc g y est strictement croissante. Ainsi, $g(x) > g(0) = 0$.

   Ainsi, $\boxed{\text{si } x \neq 0,\ g(x) > 0}$.

6. Par quotient, f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$. Pour $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} = \frac{g(x)}{(\ln(1+x))^2} > 0$$

   car $g(x) > 0$ (question 5b) et $(\ln(1+x))^2 > 0$.
   Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-1,0[\text{ et }]0,+\infty[.}$

x	-1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Partie 2 - Étude d'une suite implicite

7.
   - $]-1,+\infty[$ est un intervalle.
   - f est continue et strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ (questions 2 et 6).
   - $\dfrac{1}{n} \in]0,+\infty[= \left]\lim\limits_{x\to-1} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.

   D'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = \dfrac{1}{n} \text{ admet une unique solution}}$ sur $]-1,+\infty[$ que l'on notera u_n.

8. On sait déjà que $u_n \in]-1,+\infty[$ donc $u_n > -1$.
   $f(0) = 1 \geqslant \frac{1}{n}$ donc $f(0) \geqslant f(u_n)$. Par stricte croissance de f, $0 \geqslant u_n$. Ainsi, $\boxed{-1 < u_n \leqslant 0}$.

9. $f(0) = 1 = \frac{1}{1}$ et $0 \in]-1,+\infty[$ donc $\boxed{u_1 = 0.}$

10. $f(u_n) = \frac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ donc $\boxed{f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)}$. Par stricte croissance de f, on a donc $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

11. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par -1 donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge}}$.

12. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$.
   - Pour tout n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$ donc par passage à la limite dans une inégalité, $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$.
   - f est continue en $\ell \in [-1,+\infty[$ (d'après les questions 2 et 3), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Or $f(u_n) = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(\ell) = 0$. Or,
     - $[-1,+\infty[$ est un intervalle.
     - f est continue et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ (questions 2, 3 et 6).
     - $0 \in [0,+\infty[= \left[f(-1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.

     D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(\ell) = 0$ admet une unique solution sur $[-1,+\infty[$ et cette solution est $\ell = -1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -1}$$

Exercice 3

1. (a) On numérote les noires $1, 2, \dots, N$ et les blanches $N+1, \dots, N+B$.

```python
import numpy.random as rd

def tirage(N,B):
    k = 0
    for i in range(2):
        alea = rd.randint(1,N+B+1)
        if alea <= N : # si noir
            k = k+1
            N = N-1
        else:
            B = B-1
    return k
```

(b) Recopier et compléter la fonction `simulation(n)` qui, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, simule l'expérience aléatoire totale et renvoie la valeur de X_n.

```python
def simulation(n):
    N = 2
    B = 2
    for i in range(n):
        X = tirage(N,B)
        N = X  # les noires que l'on vient de piocher
        B = 4-X  # les autres sont blanches,
                 # 4 boules en tout à chaque fois.
    return X
```

2. L'urne peut contenir $0, 1$ ou au maximum 2 boules noires, celles que l'on a pioché juste avant. Donc $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, 2]\!]}$.

3. (a) $[X_1 = 2] = N1_0 \cap N2_0$ donc $P(X_1 = 2) = P(N1_0)P_{N1_0}(N2_0) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

$[X_1 = 0] = B1_0 \cap B2_0$ donc $P(X_1 = 2) = P(B1_0)P_{B1_0}(B2_0) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Enfin, $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2) = \frac{2}{3}$.

$$\boxed{P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}, \quad P(X_1 = 2) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}}$$

(b) $\boxed{E(X_1) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = 1}$

4. L'événement $[X_n = 2]$, ne peut être réalisé que si à chaque tirage , on a tiré deux boules noires.

Donc $[X_n = 2] = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$. On sait aussi que, si l'urne contient 2 boules noires et 2 boules blanches, la probabilité de tirer 2 boules noires est $\frac{1}{6}$ (c'est la probabilité de $[X_1 = 2]$). Ici, à chaque étape on aura cette composition. D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
P(X_n = 2) &= P(A_0) \times P_{A_0}(A_1) \times P_{A_0 \cap A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \dots \times \frac{1}{6}}_{n \text{ fois}} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n}$

5. (a)
- Si $X_n = 0$, l'urne U_n contient 4 boules blanches, donc U_{n+1} aussi : $\boxed{P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0.}$
- Si $X_n = 1$, l'urne U_n contient 1 noires et 3 blanches. Dans ce cas, $[X_{n+1} = 1] = (B1_k \cap N2_k) \cup (N1_k \cap B2_k)$. Les deux événements de cette union sont incompatibles donc

$$\begin{aligned}
P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) &= P(B1_k \cap N2_k) + P(N1_k \cap B2_k) \\
&= P(B1_k)P_{B1_k}(N2_k) + P(N1_k)P_{N1_k}(B2_k) \\
&= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times 1
\end{aligned}$$

$\boxed{P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}}$

- Si $X_n = 2$, l'urne U_n contient 2 noires et 2 blanches, donc, comme à la question 3a, $\boxed{P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}}$.

(b) Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\{[X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\}$ est un système complet d'événement. D'où, en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P\left(X_{n+1} = 1\right) &= P(X_n = 0)P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1} = 1\right) + P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1} = 1\right) \\ &\quad + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1} = 1\right) \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{P\left(X_{n+1} = 1\right) = \frac{1}{2}P\left(X_n = 1\right) + \frac{2}{3}P\left(X_n = 2\right)}$.

(c) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, la propriété : $\mathcal{P}(n)$: "$P\left(X_n = 1\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$ est vraie.

Initialisation : $n = 1$, $P(X_1 = 1) = \dfrac{2}{3}$ et $2\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 - 2\left(\dfrac{1}{6}\right)^1 = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} P\left(X_{n+1} = 1\right) &= \frac{1}{2}P\left(X_n = 1\right) + \frac{2}{3}P\left(X_n = 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(-1 + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2 \times \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$: est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n) : \text{est vraie}}$.

6.

$$\begin{aligned} P\left(X_n = 0\right) &= 1 - P\left(X_n = 1\right) - P\left(X_n = 2\right) \\ &= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P\left(X_n = 0\right) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n}$

7.

$$E(X_n) = 0 \times P(X_n = 0) + 1 \times P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2) = 0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\boxed{E(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

Exercice 4

Partie 1 - Étude de f

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) + 1$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) = 1$.

   - Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$.
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = -\infty$ et ainsi $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

2. $x \mapsto x^3 + x^2 - x - 1$ et $x \mapsto 1$ sont polynomiales donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour $x \in \mathbb{R}$,

   $$\boxed{f'(x) = (3x^2 + 2x - 1)\,e^{-x} - e^{-x}(x^3 + x^2 - x - 1) = x\,e^{-x}(-x^2 + 2x + 3)}$$

3. $\Delta(-x^2 + 2x + 3) = 16 > 0$ donx $x \mapsto -x^2 + 2x + 3$ a deux racines : $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$		$+$	
$-x^2 + 2x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	1

avec $f(3) = 32\,\mathrm{e}^{-3} + 1$.

Partie 2 - Étude du signe g

4. f et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g aussi. Pour tout réel x,

$$g'(x) = f'(x) - 1 = (-x^3 + 2x^2 + 3x)\,\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

$x \mapsto -x^3 + 2x^2 + 3x$ et $x \mapsto -1$ sont polynomiales donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x,

$$g''(x) = (-3x^2 + 4x + 3)\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}(-x^3 + 2x^2 + 3x) = (x^3 - 5x^2 + x + 3)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Or, $(x-1)(x^2 - 4x - 3) = x^3 - 4x^2 - 3x - x^2 + 4x + 3 = x^3 - 5x^2 + x + 3$ donc

$$\boxed{g''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-1)(x^2 - 4x - 3)}$$

5. $\Delta(x^2 - 4x - 3) = 28 > 0$ donc $x \mapsto x^2 - 4x - 3$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{28}}{2} = 2 - \sqrt{7}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{7}$. Or $\sqrt{7} > \sqrt{4} = 2$ donc $x_1 < 0$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		1		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 4x - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

6.
- $[0,1]$ est un intervalle
- g' est dérivable donc continue sur $[0,1]$
- g' est strictement croissante sur $[0,1]$ car sur cet intervalle $g''(x) \geqslant 0$ et $g'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions (un seule, $x = 1$)
- Soit $J = [g'(0), g'(1)] = [-1, \frac{4}{\mathrm{e}} - 1]$. $0 \in J$ car $\frac{4}{\mathrm{e}} - 1 = \frac{4-\mathrm{e}}{\mathrm{e}} > 0$ (car $2 < \mathrm{e} < 3$).

D'après le théorème de la bijection,
$\boxed{\text{l'équation } g'(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } [0,1]}$.

7. On a donc,

x	0		α		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	0

On en déduit que $\boxed{g(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in [0,1]}$.

8. $g(x) = 0$ admet deux solutions, $x = 0$ et $x = 1$.

Partie 3 - Étude d'une suite

9.
```
import numpy as np
u = 1/2
L = [u]
for k in range(100):
    u = (u**3+u**2-u-1)*np.exp(-u)+1
    L.append(u)
print(L)
```

10. Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
f est croissante sur $[0,1]$ (question 3), donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1.}$

11. $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leqslant 0$ car $u_n \in [0,1]$ (queston 7), donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

12. (u_n) est monorée par 0 et décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge}}$ vers un réel ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_0$ (par décroissance) donc $0 \leqslant \ell \leqslant u_0 = \frac{1}{2}$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ (f est continue en ℓ). Donc $f(\ell) = \ell$ c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. D'après 8, $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. On en déduit que $\boxed{\ell = 0}$.