DEVOIR SURVEILLÉ 4

Vendredi 9 janvier 2023 – 4h

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \end{array}$

Partie A – Étude de f

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Que vaut $\sqrt{x^2}$ si $x < 0$? Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.
3. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}$.
4. Former le tableau de variation de f.
5. (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - x = \dfrac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Démontrer que pour tout réel x, $1 - \sqrt{x^2+1} \leqslant 0$.
   (d) En déduire le tableau de signe de $f(x) - x$. On vérifiera que $f(x) - x \geqslant 0$ sur $]-\infty, -1]$.
   (e) En déduire la position relative de la courbe de f et de la droite Δ d'équation $y = x$.

Partie B – Étude d'une suite récurrente.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$

6. Écrire une fonction python `SuiteU(u0,n)` qui, étant donnés u_0 et $n \in \mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.
7. On suppose ici $u_0 < -1$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -1$.
   (b) En déduire, à l'aide de la question 5d, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on déterminera.
8. On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
9. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = -1$ ou $u_0 = 0$ ou $u_0 > 0$? Donner, sans démonstration, quel résultats on obtiendrait concernant la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ces cas.

Exercice 2

Une société de location de voitures possède trois agences, une à Rennes, une à Lorient, une à Brest. On étudie les trajets d'une voiture de cette société, louée tous les jours. Lorsqu'un client loue la voiture, un jour donné, dans une des trois villes, il la restitue le jour même dans une des trois agences. On suppose que la voiture n'est louée qu'une seule fois dans la journée.
Une étude statistique a permis de montrer que :

- si la voiture est louée à Rennes un certain jour, alors elle est laissée le soir à Lorient avec la probabilité $\frac{1}{4}$, tandis qu'elle est laissée à Brest avec la probabilité $\frac{3}{4}$;
- si elle est louée à Lorient, alors elle est laissée à Rennes avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissée à Brest avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et ramenée à Lorient avec la probabilité $\frac{1}{4}$;
- si elle est louée à Brest, elle est laissée à Rennes avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissée à Lorient avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et ramenée à Brest avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note R_n (respectivement L_n, B_n) l'événement « la voiture se trouve à Rennes (respectivement Lorient, Brest) le soir du n-ième jour ».
On considère les probabilités suivantes : $r_n = P(R_n)$, $\ell_n = P(L_n)$, $b_n = P(B_n)$.
On suppose qu'au départ, la voiture est à Rennes, et on pose donc : $r_0 = 1$, $\ell_0 = 0$, $b_0 = 0$.
On désigne par I la matrice identité d'ordre 3, définie par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Donner r_1, ℓ_1 et b_1.
   (b) Déterminer la probabilité que la voiture soit laissée à Lorient au soir du deuxième jour.
   (c) Un client arrive, le matin du troisième jour, à l'agence de Lorient et y loue la voiture, qui a été déposée le soir précédent. Quelle est la probabilité que le client précédent l'ait empruntée à Brest ?
   (d) D'après les résultats précédents, que peut-on dire des événements B_1 et L_2 ?
   (e) Quelle est la probabilité que la voiture fasse le trajet : Rennes - Lorient - Brest - Rennes les trois premiers jours ?

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice colonne à trois lignes U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a la relation $U_{n+1} = AU_n$, où A est la matrice carrée d'ordre 3 suivante :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
   (b) Expliciter U_0. Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n = A^n U_0$.

3. On se propose dans cette question de calculer A^n.

   On considère la matrice S, carrée d'ordre 3, définie par : $S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que la matrice S est inversible et calculer explicitement sa matrice inverse S^{-1}.

(b) On pose $D = S^{-1}AS$. Vérifier que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) La matrice D est-elle inversible ?

(d) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression sous forme de tableau de la matrice D^n.

(e) Exprimer A en fonction de S, S^{-1} et D. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $A^n = SD^nS^{-1}$.

On admet que l'on obtient, après calcul de $A^n = SD^nS^{-1}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

4. (a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, r_n, ℓ_n, b_n en fonction de n.

   (b) Déterminer les limites de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice on notera, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. L'objet de cet exercice est de prouver que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers e et d'en déduire un programme calculant une valeur approchée de e.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geqslant n$ puis démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$.

2. Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Pour la suite, on considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} = S_n + \frac{1}{n!}$.

3. Montrer que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_1 \leqslant S_n \leqslant T_n \leqslant T_1$.

5. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

6. Montrer que les deux suites ont la même limite ℓ et que $S_n \leqslant \ell \leqslant T_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

On pose maintenant, pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad g_n(x) = f_n(x) - (\mathrm{e}-1)\frac{x^n}{n!}.$$

7. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$.

8. En déduire par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in [0,1]$, $f_n(x) \geqslant 0$.

9. On admet de même que $g_n(x) \leqslant 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in [0,1]$.
   En considérant une valeur particulière de x, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$0 \leqslant \mathrm{e} - S_n \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{n!}.$$

10. En déduire que la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\ell = \mathrm{e}$.

Dans la suite de cet exercice, nous allons programmer le calcul d'une valeur approchée de e, **sans avoir recours à la bibliothèque numpy**.

11. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui, étant donné $n \in \mathbb{N}$, renvoie $n!$.

12. Recopier et compléter la fonction python `S(n)` suivante qui, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de S_n.

```
def S(n):
    s = ...
    for k in range(...):
        s = ...
    return ...
```

13. On dit que v est une valeur approchée de ℓ à ε près ($\varepsilon > 0$) lorsque $|\ell - v| \leqslant \varepsilon$.

    (a) Déduire de la question 6 que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathrm{e} - S_n \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

    (b) Justifier que si $\dfrac{1}{n!} \leqslant \varepsilon$, alors S_n est une valeur approchée de e à ε près.

    (c) Écrire alors une fonction `approx_e(epsilon)` qui, étant donné `epsilon`> 0, renvoie une valeur approchée de e à `epsilon` près. Interdiction d'utiliser numpy et la fonction exponentielle ici. On peut en revanche utiliser les fonctions des questions précédentes.