DEVOIR SURVEILLÉ 4 – CORRIGÉ

Exercice 1

Partie A – Étude de f

1. Les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x^2+1$ sont polynomiales donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, pour tout réel x, $x^2+1 \geqslant 1 > 0$ donc par composée, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sqrt{x^2+1} > 0$. Par quotient puis différence, $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}.}$

2. (a) Soit $x > 0$. $\sqrt{x^2} = x$ dans ce cas donc

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} - 1 = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+1\frac{1}{x^2}}} - 1$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1}} - 1 = 0}$.

(b) Soit $x < 0$. $\boxed{\sqrt{x^2} = -x}$ dans ce cas donc, avec le même calcul,

$$f(x) = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 = -\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+1\frac{1}{x^2}}} - 1$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1}} - 1 = -2}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(x+1)}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}$$

4. Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1}(x^2+1) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$	0

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x+1-\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{(x+1) - \sqrt{x^2+1}(x+1)}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff f(x) - x = 0 \\ &\iff \frac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \\ &\iff (x+1)(1-\sqrt{x^2+1}) = 0 \\ &\iff x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \sqrt{x^2+1} = 0 \\ &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2+1} = 1 \\ &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x^2+1 = 1 \\ &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 0 \\ &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 0 \end{aligned}$$

(c) Pour tout réel x, $x^2+1 \geqslant 1$ donc, par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1$. Ainsi, $\boxed{1 - \sqrt{x^2+1} \leqslant 0}$.

(d) On a $f(x) - x = \frac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$, donc

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\sqrt{x^2+1}$		$-$		$-$	0	$-$	
$\sqrt{x^2+1}$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

(e) La courbe de f est au dessus de Δ sur $]-\infty,-1[$ et en dessous sur $[-1,+\infty[$. Elles se coupent aux abscisses -1 et 0.

Partie B – Étude d'une suite récurrente.

6.
```
import numpy as np
def SuiteU(u0,n):
    u = u0
    for k in range(n):
        u = (u+1)/np.sqrt(u**2+1) -1
    return u
```

7. On suppose ici $u_0 < -1$.

(a)
- Pour $n=0$ on a $u_0 < -1$.
- Soit n entier tel que $u_n < -1$ alors u_n et -1 appartiennent à $]-\infty,1]$ et f y est croissante strictement, donc $f(u_n) < f(-1)$ et $u_{n+1} < -1$.
- Donc, par récurrence, on a $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ u_n < -1.}$

(b) Pour tout x de $]-\infty,-1]$ on a $f(x) \geqslant x$ donc comme pour tout entier n, $u_n \in]-\infty,-1]$, $f(u_n) \geqslant u_n$ et $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par -1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ.

- Pour tout entier n, $u_n < -1$ donc par passage à la limite, $\ell \leqslant -1$.
- Pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Par passage à la limite, $\ell = f(\ell)$. D'après la question 5b, ceci donne $\ell=-1$ ou $\ell=0$. D'après le premier point, on a forcément $\ell=-1$.

Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } -1.}$

8. On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.

(a)
- pour $n=0$ on a $-1 < u_0 < 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $-1 < u_n < 0$.
  Alors comme et f est croissante strictement sur $]-\infty,1]$ et que -1, u_n et 0 en sont éléments,
  $f(-1) < f(u_n) < f(0)$ et donc $-1 < u_{n+1} < 0$.
- Donc par récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier } n,\quad -1 < u_n < 0}$.

(b) D'après le signe de $f(x)-x$, avec ici $x = u_n \in]-1,0[$, $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n \leqslant 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par -1. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ'.

- Par décroissance, pour tout entier n, $u_n \leqslant u_0$ donc par passage à la limite, $\ell \leqslant u_0 < 0$.
- Comme prédecemment, $\ell' = f(\ell')$ donc $\ell' = -1$ ou $\ell' = 0$. D'après le premier point, on a forcément $\ell' = -1$.

Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } -1.}$

9. Si $u_0 = -1$, $u_1 = -1$ et on va avoir, pour tout n, $u_n = -1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge vers -1.
Si $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ et on va avoir, pour tout n, $u_n = 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge vers 0.
Enfin, si $u_0 > 0$, on peut montrer que $u_n \geqslant 0$ pour tout n et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Exercice 2

1. (a) Puisque la voiture est à Rennes le premier matin, $\boxed{r_1 = 0,\ \ell_1 = \frac{1}{4},\ b_1 = \frac{3}{4}}$.

(b) On cherche $\ell_2 = P(L_2)$. Le premier jour, est est laissée soit à Lorient, soit à Brest donc : $L_2 = (L_1 \cap L_2) \cup (B_1 \cap L_2)$. Or, $(L_1 \cap L_2)$ et $(B_1 \cap L_2)$ sont incompatibles donc

$$P(L_2) = P(L_1\cap L_2)+P(B_1\cap L_2) = P(L_1)P_{L_1}(L_2)+P(B_1)P_{B_1}(L_2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$\boxed{\text{La probabilité que la voiture soit laissée à Lorient au soir du deuxième jour est } \frac{1}{4}.}$

(c) On cherche $P_{L_2}(B_1)$. D'après la formule de Bayes,

$$P_{L_2}(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(L_2)}{P(L_2)} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}. \qquad \boxed{P_{L_2}(B_1) = \frac{3}{4}}$$

(d) $P_{L_2}(B_1) = P(B_1)$ (ou $P_{B_1}(L_2) = P(L_2)$) donc $\boxed{B_1 \text{ et } L_2 \text{ sont indépendants.}}$

(e) On cherche $P(L_1 \cap B_2 \cap R_3)$. D'après la formule des probabilités composées

$$\boxed{P(L_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(L_1)P_{L_1}(B_2)P_{L_1\cap B_2}(R_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.}$$

2. (a) (R_n, L_n, B_n) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(L_n)P_{L_n}(R_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(R_{n+1})$$

donc

$$r_{n+1} = r_n \times 0 + \ell_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{2}.$$

De même,

$$\ell_{n+1} = r_n \times \frac{1}{4} + \ell_n \times \frac{1}{4} + b_n \times \frac{1}{4},$$

$$b_{n+1} = r_n \times \frac{3}{4} + \ell_n \times \frac{1}{4} + b_n \times \frac{1}{4}.$$

Donc

$$AU_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \times 0 + \ell_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{2} \\ r_n \times \frac{1}{4} + \ell_n \times \frac{1}{4} + b_n \times \frac{1}{4} \\ r_n \times \frac{3}{4} + \ell_n \times \frac{1}{4} + b_n \times \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ \ell_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{U_{n+1} = AU_n}$.

(b) $\boxed{U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

Montrons par récurrence que $U_n = A^n U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $A^0 U_0 = IU_0 = U_0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n = A^n U_0$. Alors $U_{n+1} = AU_n = A^{n+1}U_0$.
Conclusion : par récurrence, $\boxed{U_n = A^n U_0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

3. (a) Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$SX = B \iff \begin{cases} 4x + \boxed{y} = a \\ 3x + \boxed{z} = b \\ 5x - y - z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + \boxed{y} = a \\ 3x + \boxed{z} = b \\ 12x = a + b + c \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c \\ z = -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b - \frac{1}{4}c \\ x = \frac{1}{12}a + \frac{1}{12}b + \frac{1}{12}c \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Cette équation admet une unique solution pour tout B, donc S est inversible et le calcul donne $\boxed{S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}$.

(b)

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) D est diagonale et un de ses coefficients diagonaux est nul donc $\boxed{D \text{ n'est pas inversible.}}$ Ou alors : D a une ligne/colonne nulle.

(d) Puisque D est diagonale, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

(e) On sait que $D = S^{-1}AS$ donc $\boxed{SDS^{-1} = SS^{-1}ASS^{-1} = A}$.
Montrons par récurrence que $A^n = SD^nS^{-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.
Initialisation : $A = SDS^{-1}$ donc c'est vrai pour $n = 1$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = SD^nS^{-1}$.
Alors, $A^{n+1} = A^nA = SD^nS^{-1}SDS^{-1} = SD^nDS^{-1} = SD^{n+1}S^{-1}$.
Conclusion : par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ on a } A^n = SD^nS^{-1}}$.

4. (a) $$U_n = A^nU_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
donc :
$$\begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \text{ et donc } \boxed{\begin{cases} r_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \ell_n = \frac{1}{4} \\ b_n = \frac{5}{12} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}}$$

(b) Puisque $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{12}}.$$

Exercice 3

1. Pour $n \geqslant 1$, $\boxed{n! = (n-1)! \times n \geqslant n}$ car $(n-1)! \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$. Par minoration, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$ donc $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$.

3. Soit $n \geqslant 1$.
$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - S_n - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$
car $n \geqslant 1$. Donc $\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

4. Soit $n \geqslant 1$.
   - $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante donc $S_n \geqslant S_1$.
   - $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante donc $T_n \leqslant T_1$.
   - $T_n = S_n + \frac{1}{n!} \geqslant S_n$ car $\frac{1}{n!} \geqslant 0$.

   Ainsi, $\boxed{S_1 \leqslant S_n \leqslant T_n \leqslant T_1}$.

5.
   - $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par T_1 donc elle converge.
   - $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par S_1 donc elle converge.

6. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$, $T_n = S_n + \frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. $\boxed{\text{Les deux suites ont la même limite}}$.
Comme (S_n) est croissante et tend vers ℓ, $S_n \leqslant \ell$ et (T_n) est décroissante et tend vers ℓ donc $T_n \geqslant \ell$. Ainsi, $\boxed{S_n \leqslant \ell \leqslant T_n}$.

7. $\mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$$f'_{n+1}(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{kx^{k-1}}{k!}.$$
Or, si $k = 0$, $\dfrac{k}{k!} = 0$ et si $k \geqslant 1$, $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$. Donc
$$f'_{n+1}(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x - \sum_{\substack{\ell=0 \\ (\ell=k-1)}}^{n} \frac{x^\ell}{\ell!} = f_n(x).$$

8. Initialisation : pour tout $x \in [0,1]$, $f_0(x) = \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$ car $x \geqslant 0$ et que la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Puisque $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$, on en déduit que f_{n+1} est croissante sur $[0,1]$. Donc pour tout $x \in [0,1]$, $x \geqslant 0$ donc $f_{n+1}(x) \geqslant f_{n+1}(0) = 1 - 1 = 0$.
Conclusion : par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in [0,1],\ f_n(x) \geqslant 0.}$

9. Prenons $x = 1 \in [0,1]$. $f_n(1) = \mathrm{e} - S_n \geqslant 0$ et $g_n(1) = e - S_n - \dfrac{\mathrm{e}-1}{n!} \leqslant 0$ donc $\boxed{0 \leqslant \mathrm{e} - S_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{n!}}$.

10. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}-1}{n!} = 0$ donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{e} - S_n) = 0$. Ainsi, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \mathrm{e}}$.

11.

```python
def factorielle(n):
    f = 1
    for k in range(1,n+1):
        f = f*k
    return f
```

12.

```python
def S(n):
    s = 0
    for k in range(0,n+1):
        s = s + 1/factorielle(k)
    return s
```

13. (a) Puisque $\ell = \mathrm{e}$, on a, d'après la question 6, $S_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant S_n + \dfrac{1}{n!}$ donc $\boxed{0 \leqslant \mathrm{e} - S_n \leqslant \dfrac{1}{n!}.}$

(b) On a donc $|\mathrm{e} - S_n| \leqslant \dfrac{1}{n!}$, car $|\mathrm{e} - S_n| = e - S_n$.
Si $\dfrac{1}{n!} \leqslant \varepsilon$, alors $|\mathrm{e} - S_n| \leqslant \varepsilon$ et donc $\boxed{S_n \text{ est une valeur approchée de e à } \varepsilon \text{ près.}}$

(c)

```python
def approx_e(epsilon):
    n = 1
    while 1/factorielle(n)>epsilon:
        n = n+1
    return S(n)
```