Devoir surveillé 2

Vendredi 14 octobre 2022 – 4h
Calculatrices interdites
Soignez la présentation, encadrez vos résultats et conclusions.

Exercice 1

Les questions de cet exercices sont indépendantes et portent sur des sujets variés (A.D.C.)

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$. Déterminer son ensemble de définition puis démontrer qu'elle est impaire.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ La suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} - u_n + 1 = 0$. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique puis déterminer son terme général.
3. Déterminer le terme général de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} t_0 = 4, \quad t_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+2} = -t_{n+1} + 6t_n \end{cases}$$
4. Résoudre l'inéquation $|2x - 5| \leqslant 6$.
5. Étudier la limite de $h_n = e^{-n^3}(n+1)$.
6. Étudier la limite de $w_n = \ln(n) - n^2 + 5$ quand $n \to +\infty$.
7. (a) Déterminer la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \frac{1 - 3^n}{3^n + 2^n}$$
   (b) Écrire un programme python qui affiche les 20 premiers termes de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Résoudre le système linéaire suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 4x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$$

Attention à écrire clairement pour cet exercice : $u_n + 1 \neq u_{n+1}$

Partie 1 : Étude de la suite récurrente

1. Soit $f\colon x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x+1}$.
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) En déduire que, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 1$.
2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.
3. Écrire un programme python qui, étant donné un entier naturel n, renvoie la valeur de u_n.
   Inutile de définir n, on suppose qu'il est déjà donné.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
6. Déterminer $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie 2 : Terme général de la suite

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}.$$

7. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
8. Donner le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. En déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_n = \dfrac{n+4}{n+2}$.
10. Retrouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f et prouver que f est également dérivable sur D.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Justifier que, pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{-2x\, g(x)}{(x^2+1)^2(1-x^2)} \quad \text{avec} \quad g(x) = x^2 + 1 + (1-x^2)\ln(1-x^2).$$

4. (a) Déterminer le signe de $g'(x)$ pour $x \in D$.
   (b) Dresser alors le tableau de variation de g sur D (hors limites).
   (c) En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in D$.
5. Dresser alors le tableau de variation de f sur D (hors limites).

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto (x + \ln(x))\, \mathrm{e}^{x-1}$.

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. (a) Dresser le tableau de variation de la fonction $g : x \mapsto \ln(x) + \dfrac{1}{x}$ (hors limites).

   (b) En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) + \dfrac{1}{x} > 0$ puis $1 + \dfrac{1}{x} + x + \ln(x) > 0$.
3. Déterminer le sens de variation de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Partie 2 : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
6. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant e^n$.
7. Démontrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que l'on précisera.
8. Écrire un programme python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{20}$.