DEVOIR SURVEILLÉ 2 – CORRIGÉ

Exercice 1

1. $x \mapsto e^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, polur tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc $e^{-x} + 1 > 1$ donc $e^{-x} + 1 \neq 0$. Par quotient, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$, qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} \\ &= \frac{(e^x - 1)(e^{-x} + 1)}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} + \frac{(e^{-x} - 1)(e^x + 1)}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\ &= \frac{1 + e^x - e^{-x} - 1 + 1 + e^{-x} - e^x - 1}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $f(-x) = -f(x)$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} = au_n + b$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$. Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmético-géométrique}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 1$. On a donc $u_n = v_n - 1$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(v_n - 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 3$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or, $u_n = v_n - 1$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1.}$$

3. $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est

$$(EC) : x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0.$$

$\Delta = 25 > 0$ donc (EC) a deux solutions : $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$. D'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \lambda \times (-3)^n + \mu \times 2^n.$$

Or,

$$\begin{cases} t_0 = 4 \\ t_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ -3\lambda + 2\mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ 5\mu = 15 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 3 \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad t_n = (-3)^n + 3 \times 2^n}$$

4. $x \mapsto 2x - 5$ (fonction affine) et $x \mapsto |x|$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc, par composée, $x \mapsto |2x - 5|$ également.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $|2x - 5| \leqslant 6 \Leftrightarrow -6 \leqslant 2x - 5 \leqslant 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11}{2}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left[-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right].}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. $h_n = e^{-n^3}(n + 1) = \frac{n}{e^{n^3}} + e^{-n^3}$.

- $\lim\limits_{n\to=\infty} (-n^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par composée, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n^3} = 0$.
- Rigoureusement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{n^3}}$ ne fait pas partie des croissances comparées. Voici comment justifier proprement la limite : Posons $x = n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour $n > 0$, on a $x > 0$ et $x^{1/3} = (n^3)^{1/3} = n^1 = n$. Donc $\frac{n}{e^{n^3}} = \frac{x^{1/3}}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{n^3}} = 0$.

Par somme $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0.}$

6. Soit $n > 0$. $w_n = n^2\left(\frac{\ln(n)}{n^2} - 1 + \frac{5}{n^2}\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc par combinaison linéaire,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}-1+\dfrac{5}{n^2}\right)=-1$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=-\infty.}$

7. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $s_n=\dfrac{1-3^n}{3^n+2^n}=\dfrac{3^n\left(\dfrac{1}{3^n}-1\right)}{3^n\left(1+\dfrac{2^n}{3^n}\right)}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-1}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$.

   Or, $-1<\dfrac{1}{3}<1$ et $-1<\dfrac{2}{3}<1$ donc $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

   Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=-1.}$

   (b)
```
for n in range(20):
    print((1-3**n)/(3**n+2**n))
```

8.

$$\begin{cases}2x+\boxed{y}-z=2\\3x+y+2z=1\\4x+y+5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\boxed{y}-z=2\\x+3z=-1 & L_2\leftarrow L_2-L_1\\2x+6z=-2 & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{y}-7z=4 & L_1\leftarrow L_1-2L_2\\\boxed{x}+3z=-1\\0=0 & L_3\leftarrow L_3-2L_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{y}=4+7z\\\boxed{x}=-1-3z\end{cases}\Leftrightarrow (x,y,z)=(-1-3z,4+7z,z)$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\{(-1-3z,4+7z,z)\text{ avec } z\in\mathbb{R}\}}$.

Exercice 2

Partie 1 : Étude de la suite récurrente

1. (a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (fonction rationnelle). Pour tout réel $x\neq-1$,

$$f'(x)=\frac{3(x+1)-(3x-1)}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}>0$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur }]-\infty,-1[\text{ et sur }]-1,+\infty[}$ (attention, les variations sont à donner sur des intervalles).

   (b) En particulier, f est croissante sur $[1,+\infty[$, donc y est minorée par $f(1)=1$. Ceci signifie que, $\boxed{\text{pour tout } x\geqslant 1,\ f(x)\geqslant 1.}$

2. Montrons pas récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « u_n est défini et $u_n\geqslant 1$ » est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   Initialisation : $u_0=2$ est bien défini et est supérieur à 1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors $u_n+1\neq 0$ donc $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-1}{u_n+1}$ est bien défini. De plus, $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_n\geqslant 1$. D'après la question 1.b., $u_{n+1}\geqslant 1$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et minorée par } 1.}$

3.
```
u = 2
for k in range(n):
    u = (3*u-1)/(u+1)
print(u)
```

4. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-1}{u_n+1}-u_n=\frac{3u_n-1-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n+1}=\frac{-(u_n^2-2u_n+1)}{u_n+1}$$

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n-1)^2}{u_n+1}.$$

   Or $u_n+1\geqslant 2>0$ et $(u_n-1)^2\geqslant 0$, donc $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$.
   $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

6. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 1$ donc par passage à la limite dans une inégalité, $\ell\geqslant 1$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-1}{u_n+1}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$ et par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3u_n-1}{u_n+1}=\dfrac{3\ell-1}{\ell+1}$ (car $\ell+1\in\mathbb{R}^*$). On obtient $\ell=\dfrac{3\ell-1}{\ell+1}$. Or,

$$\ell=\frac{3\ell-1}{\ell+1}\iff \ell(\ell+1)=3\ell-1\iff \ell^2-2\ell+1=0\iff(\ell-1)^2=0\iff\ell=1$$

   Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1.}$

Partie 2 : Terme général de la suite

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n-1}{u_n+1} - 1} - \frac{1}{u_n-1} \\ &= \frac{u_n+1}{(3u_n-1)-(u_n+1)} - \frac{1}{u_n-1} \\ &= \frac{u_n+1}{2u_n-2} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n+1}{2(u_n-1)} - \frac{2}{2(u_n-1)} \\ &= \frac{u_n-1}{2(u_n-1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}$. $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } \frac{1}{2}.}$ Son premier terme est $\boxed{v_0 = \frac{1}{u_0-1} = 1}$.

8. D'après le cours, $\boxed{v_n = 1 + n \times \frac{1}{2}}$

9. $v_n = \dfrac{1}{u_n-1} \Leftrightarrow (u_n-1)v_n = 1 \Leftrightarrow u_nv_n - v_n = 1 \Leftrightarrow u_nv_n = 1 + v_n \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1+v_n}{v_n}$

Donc $\boxed{u_n = \dfrac{1+1+\frac{n}{2}}{1+\frac{n}{2}} = \dfrac{4+n}{2+n}.}$

10. $u_n = \dfrac{n\left(\frac{4}{n}+1\right)}{n\left(\frac{2}{n}+1\right)} = \dfrac{\frac{4}{n}+1}{\frac{2}{n}+1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, par combinaison linéaire puis quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

Exercice 3

1. Les fonctions $x \mapsto 1-x^2$ et $x \mapsto x^2+1$ sont polynomiales donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée et quotient, f est définie et dérivable sur $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 > 0 \text{ et } x^2+1 \neq 0\}$.
Or, $x^2+1 \geqslant 1$ donc $x^2+1 \neq 0$ pour tout réel x. De plus, on a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } D =]-1,1[.}$

2. $]-1,1[$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(-x) = \frac{\ln(1-(-x)^2)}{(-x)^2+1} = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2+1} = f(x)$$

donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

3. Soit $x \in D$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-2x}{1-x^2}(x^2+1) - 2x\ln(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x(x^2+1) - 2x\ln(1-x^2)(1-x^2)}{(x^2+1)^2(1-x^2)} \\ &= \frac{-2x\left((x^2+1)+\ln(1-x^2)(1-x^2)\right)}{(x^2+1)^2(1-x^2)} \\ &= \frac{-2x\, g(x)}{(x^2+1)^2(1-x^2)} \end{aligned}$$

4. (a) Sur D, $x \mapsto 1-x^2$, $x \mapsto x^2+1$ et $x \mapsto \ln(1-x^2)$ sont dérivable donc par produit et somme, g est dérivable sur D.
Soit $x \in D$, $g'(x) = 2x + (-2x)\ln(1-x^2) + (1-x^2)\dfrac{-2x}{1-x^2} = -2x\ln(1-x^2)$.
Or, $1-x^2 \leqslant 1$ donc $\ln(1-x^2) \leqslant 0$.

x	-1		0		1
$-2x$	‖	$+$	0	$-$	‖
$\ln(1-x^2)$	‖	$-$	0	$-$	‖
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖

(b) On a $g(0) = 1$ donc

x	-1		0		1
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
g	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	‖

(c) Pour tout réel $x \in D$, $g(x) \geqslant 1$. Ainsi, $\boxed{g(x) > 0 \text{ pour tout } x \in D.}$

5. $f'(x) = \dfrac{-2x\, g(x)}{(x^2+1)^2(1-x^2)}$. Or, pour $x \in D =]-1,1[$, $1-x^2>0$, $(x^2+1)^2>0$ et $g(x)>0$. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x$.

x	-1		0		1
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
f	$\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\|$

Exercice 4

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. $x \mapsto x$ et $x \mapsto x-1$ sont affines donc définies sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Par somme, $x \mapsto x + \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc par composée, $x \mapsto \mathrm{e}^{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Par produit, $\boxed{f \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2. (a) $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ l'est sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x>0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$. Puisque $x^2>0$, $g'(x)$ est du signe de $x-1$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
g	$\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

   (b) D'après la question précédente, $g(x) \geqslant 1$ pour tout $x>0$ donc $g(x)>0$ c'est-à-dire $\boxed{\ln(x) + \dfrac{1}{x} > 0}$.
   De plus, $1 + \dfrac{1}{x} + x + \ln(x) = \left(\ln(x) + \dfrac{1}{x}\right) + (1+x)$ avec $\ln(x) + \dfrac{1}{x} > 0$ et $x+1>0$ car $x>0$. Donc par somme, $\boxed{1 + \dfrac{1}{x} + x + \ln(x) > 0}$.

3. $x \mapsto x$, $x \mapsto x-1$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont dérivables $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ l'est sur $\mathbb{R}_+^*$. Par somme, composée, puis produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x>0$. $f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x-1} + (x+\ln(x))\,\mathrm{e}^{x-1} = \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right)\mathrm{e}^{x-1}$. Or, $1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x) > 0$ et $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, donc $f'(x)>0$. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

4. $f'(1) = 3$ et $f(1)=1$ donc $f'(1)(x-1)+f(1) = 3(x-1)+1 = 3x-2$. L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est $\boxed{y = 3x-2}$.

Partie 2 : Étude d'une suite récurrente

5. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
   Initialisation : $u_0 = 2$ existe et $u_0 \geqslant 2$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
   Alors $u_n > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ existe bien.
   Et comme f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que u_n et 2 en sont éléments, $f(u_n) \geqslant f(2) = (2+\ln(2)) \times \mathrm{e}$. Or $\ln(2) \geqslant 0$ (car $2 \geqslant 1$), donc $2 + \ln(2) \geqslant 2$. Et $\mathrm{e} \geqslant 1$. Par produit d'inégalités de nombres positifs, $f(2) \geqslant 2$. Donc $u_{n+1} \geqslant 2$.
   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 2}$.

6. Initialisation : pour $n=0$, $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$ donc $u_0 \geqslant e^0$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant e^n$.
   $u_{n+1} = f(u_n) = (u_n + \ln(u_n))\, e^{u_n - 1}$ avec
   - $\ln(u_n) \geqslant \ln(2) \geqslant 0$ (par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$) donc $u_n + \ln(u_n) \geqslant u_n \geqslant e^n$.
   - et $u_n - 1 \geqslant 1$ donc $e^{u_n-1} \geqslant e^1$, par croissance de exp sur $\mathbb{R}$.

   Par produit d'inégalités de nombres positifs, $u_{n+1} \geqslant e^n \times e^1 = e^{n+1}$.
   Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant e^n}$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$, donc par minoration $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

8.
```
import numpy as np
n = 0
u = 2
while u < 10**20:
    u = (u+np.log(u))*np.exp(u-1)
    n = n+1
print(n)
```