Devoir surveillé 1

Vendredi 9 septembre 2022 – 2h
Calculatrices autorisées.
Soignez la présentation, encadrez vos résultats et conclusions.

Exercice 1

Au 1er janvier 2022, un arboriculteur possède un parc vieillissant de 2 000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 10% des pommiers car ils sont endommagés ;
- il replante 100 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1er janvier de l'année $2022+n$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9\ u_n + 100$

1. Donner u_0.
2. Sur le graphique en annexe 1 (à joindre à la copie), placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis grâce aux droites tracées, placer u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses. On laissera apparents les traits de contruction.
3. Calculer u_1 et u_2.
4. Combien de pommiers possèdera l'arboriculteur au 1er janvier 2025 ?
5. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_n - 1000$, pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
6. Si l'évolution se poursuit toujours selon ce modèle, vers quelle valeur va tendre à terme le nombre de pommiers de cet arboriculteur ? Justifier la réponse.

Exercice 2

1. Résoudre l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ d'inconnue réelle x.

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 - x - 2}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 6x - 5}{(x^2 - x - 2)^2}$.
3. En déduire le tableau de variation de f. Compléter celui-ci, par lecture graphique de la courbe de f représentée en annexe 2, par les limites de f aux bornes ouvertes de son ensemble de définition.
4. (a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse 3.
   (b) Tracer, soigneusement, cette tangente T sur le graphique de l'annexe 2.
5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses puis avec l'axe des ordonnées.

Exercice 3

Une entreprise fabrique des pièces détachées pour l'industrie automobile. Elle possède deux machines qui fabriquent le même enjoliveur de roue.

La machine A fabrique 75 % des pièces par jour, la machine B, plus petite, n'en fabrique que 25 %. Le taux des pièces défectueuses de la machine A est estimé à 1 %. Celui de la machine B est estimé à 3 %.

Au service du contrôle de qualité, on choisit une pièce au hasard dans la production du jour et on teste sa conformité.

On note :

- A l'événement « La pièce a été fabriquée par la machine A » ;
- B l'événement « La pièce a été fabriquée par la machine B » ;
- D l'événement « La pièce est défectueuse ».

On donnera précisément les formules écrites avec les événements avant de passer aux applications numériques.

1. Représenter cette situation par un arbre probabiliste.
2. Calculer $P(D)$.
3. Calculer $P_D(A)$ et $P_D(B)$.
4. Sachant que la pièce est non conforme, est-il plus probable qu'elle provienne de la machine A ou de la machine B ?
5. Même question sachant que la pièce observée est, cette fois, conforme.

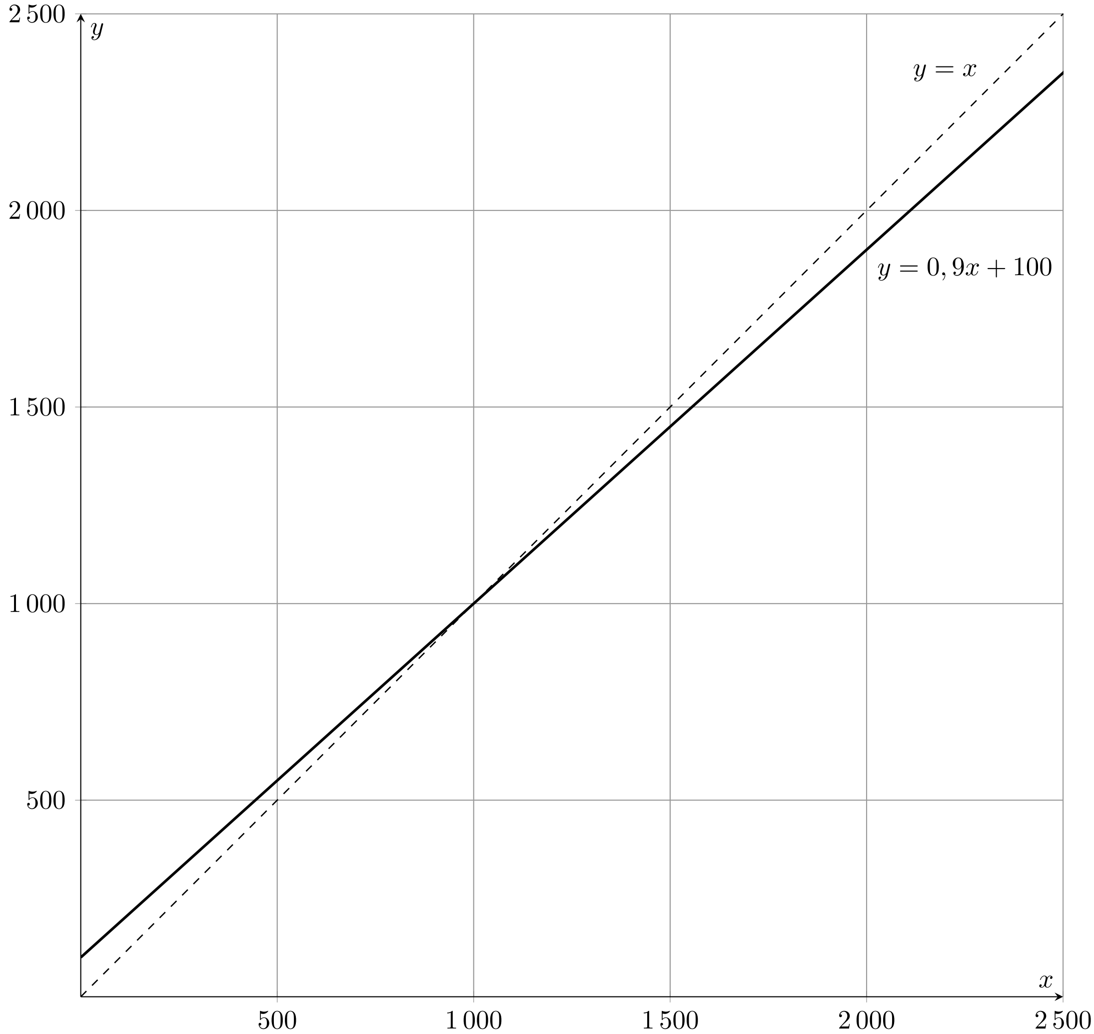
Exercice 4

Le taux d'hydratation de la peau, x heures après avoir appliqué une crème solaire, est modélisé par la fonction f définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 50x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Quel le moment où le taux d'hydratation est maximal ?
3. Justifier que l'équation $f(x) = 50$ admet deux solutions : une dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ et une autre dans l'intervalle $[5\,;\,5{,}5]$. Justifier précisément.
4. La crème solaire ne peut être commercialisée que si le taux d'hydratation dépasse 50% pendant une durée dépassant 6 heures. Ce critère est-il rempli ?
5. Déterminer les points d'intersection entre la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.

Annexe 1, à rendre avec la copie

Nom Prénom :



Annexe 2