Devoir surveillé 1

Vendredi 10 septembre 2020 – 2h
Calculatrices autorisées.
Soignez la présentation, encadrez vos résultats et conclusions.

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

1. (a) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Étudier les limites de f en 1, à gauche et à droite (en 1^- et en 1^+).
   (c) Étudier les limites de f en -1, à gauche et à droite (en $(-1)^-$ et en $(-1)^+$).
2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Calculer $f'(x)$.
3. Dresser alors le tableau de variation de f.
4. Donner, en français, les variations de f.
5. Déterminer les points d'intersection entre la courbe de f, $\mathcal{C}_f$, et l'axe des abscisses.

Exercice 2

Une association d'un village de 1000 habitants (nombre constant) étudie le nombre de ses bénévoles. L'année de création de l'association, il y avait 80 bénévoles. Puis chaque année, on estime que 40 % d'entre eux quitteront l'association et 10 % des habitants qui n'étaient pas bénévoles l'année précédente. On note u_n le nombre d'habitants bénévoles et v_n le nombre d'habitants non-bénévoles, n années après la création de l'association.

1. Donner la valeur de u_0, de v_0 et de $u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Justifier que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{1}{10}v_n.$$
3. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 100.$$
4. (a) Dans un repère orthonormé (échelle : 1 grand carreau ou 1 cm = 20), tracer la droite D d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 100$.
   Représenter graphiquement u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite D. Laisser apparent tout trait de construction.
   (b) Conjecturer la monotonie et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n - 200$.
   (a) Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   (b) En déduire l'expression de w_n puis de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. Démontrer les deux conjectures de la question 4.b.

Exercice 3

Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules bleues et 5 boules rouges. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne.

On notera

- J_1 l'événement « tirer une boule jaune au premier tirage » ; J_2 l'événement « tirer une boule jaune au deuxième tirage » ;
- B_1 l'événement « tirer une boule bleue au premier tirage » ; B_2 l'événement « tirer une boule bleue au deuxième tirage » ;
- R_1 l'événement « tirer une boule rouge au premier tirage » ; R_2 l'événement « tirer une boule rouge au deuxième tirage » ;

Tous les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Déterminer la probabilité de tirer deux boules rouges.
2. Déterminer la probabilité de tirer une boule bleue au deuxième tirage.
3. Un spectateur arrive à la fin de l'expérience et voit uniquement qu'une boule bleue a été obtenue au deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule jaune au premier tirage ?

Exercice 4

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6\,\mathrm{e}^{x} + 4x + 5.$$

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x})$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.
2. Montrer que pour tout réel x, $h'(x) = 2(\mathrm{e}^{x} - 1)(\mathrm{e}^{x} - 2)$.
3. (a) Résoudre les inéquations $\mathrm{e}^{x} - 1 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{x} - 2 \geqslant 0$, d'inconnue réelle x.
   (b) En déduire le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$. On fera un tableau.
4. Dresser le tableau de variation complet de h sur $\mathbb{R}$.
5. Notons $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h et $\mathcal{D}$ la droite l'équation $y = 4x + 5$. La courbe $\mathcal{C}_h$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles des points communs ? Justifier.