DEVOIR SURVEILLÉ 1

Corrigé

Exercice 1

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2}$.

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 - 1) = 1 > 0$. De plus, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} = 0^-$ et ainsi $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty}$.

De plus, $\lim\limits_{x \to 1^+} = 0^+$ et ainsi $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty}$.

(c) On procède de la même manière en -1.
$\lim\limits_{x \to -1}(2x^2 - 1) = 2 \times (-1)^2 - 1 = 1 > 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to (-1)^-} = 0^+$ et ainsi $\boxed{\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty}$.

Enfin, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} = 0^-$ et ainsi $\boxed{\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x(2x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3 + 2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

donc $\boxed{f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On a : $(x^2 - 1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-2x$. Cela donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

4. f est croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 0]$. f est décroissante sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

5. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } -\frac{1}{\sqrt{2}}.}$

Exercice 2

1. Au début il y a 80 bénévoles donc $\boxed{u_0 = 80 \text{ et } v_0 = 1000 - 80 = 920.}$
De plus, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n + v_n = 1000.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Entre l'année n et l'année $n + 1$, l'association a :

- perdu 40 % de ses bénévoles, c'est-à-dire $-\frac{40}{100}u_n$;
- gagné 10 % de nouveaux bénévoles, c'est-à-dire $+\frac{10}{100}v_n$.

Ainsi,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{40}{100}u_n + \frac{10}{100}v_n = \frac{60}{100}u_n + \frac{1}{10}v_n = \frac{3}{5}u_n + \frac{1}{10}v_n.$$

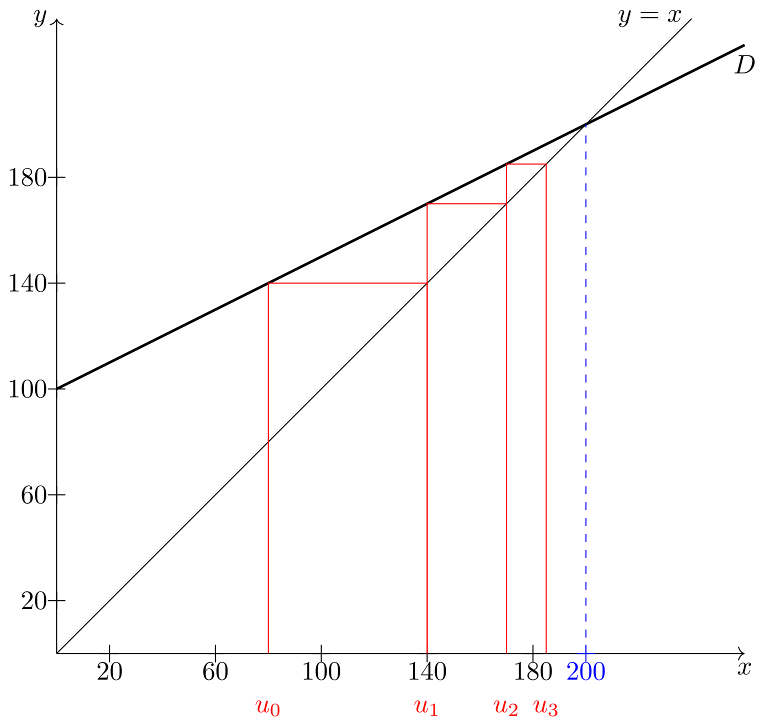
On a bien $\boxed{u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{1}{10}v_n.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $v_n = 1000 - u_n$ (question 1), donc

$$u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{1}{10}(1000 - u_n) = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right)u_n + 100 = \frac{5}{10}u_n + 100 = \frac{1}{2}u_n + 100.$$

Ainsi, $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 100.}$

4. (a)



(b) $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ semble croissante et converger vers 200.}}$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}u_n + 100 - 200 = \frac{1}{2}(w_n + 200) - 100 = \frac{1}{2}w_n.$$

$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc géométrique de raison } \frac{1}{2}.}$

(b) Puisque $w_0 = u_n - 200 = 80 - 200 = -120$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{w_n = -120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Or, $u_n = w_n + 200$ donc $\boxed{u_n = 200 - 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Enfin, $v_n = 1000 - u_n$ donc $\boxed{v_n = 800 + 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

6. • Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(200 - 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left(200 - 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= 60 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Autre calcul possible :

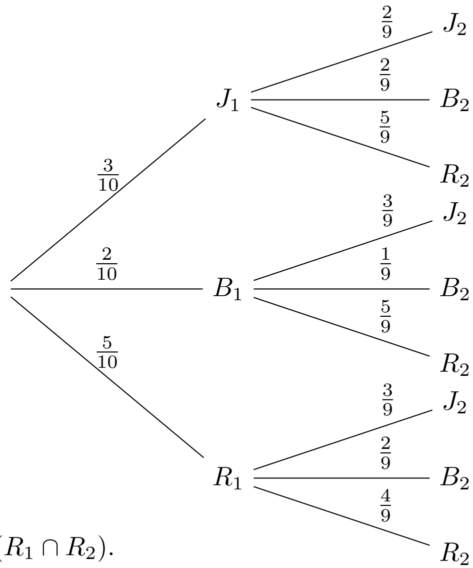
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + 100 - u_n = 100 - \frac{1}{2}u_n \\ &= 100 - \frac{1}{2}\left(200 - 120 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= 60 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien croissante.}}$

• Limite. Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 200}$.

Exercice 3

On peut faire un arbre pondéré pour l'expérience (pas obligatoire sur la copie ici).



1. On cherche ici $P(R_1 \cap R_2)$.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

$\boxed{\text{La probabilité de tirer deux boules rouges est } \frac{2}{9}.}$

2. On cherche $P(B_2)$. Ici, (J_1, B_1, R_1) est une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(J_1) \times P_{J_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité de tirer une boule bleue au deuxième tirage est } \frac{1}{5}.}$

3. On cherche ici $P_{B_2}(J_1)$.

$$P_{B_2}(J_1) = \frac{P(J_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(J_1) \times P_{J_1}(B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3}.$$

$\boxed{\text{La probabilité d'avoir obtenu une boule jaune au premier tirage est } \frac{1}{3}.}$

Exercice 4

1. (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{2x} - 6 e^x = e^x(e^x - 6)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - 6 e^x) = +\infty}$. (erreur énoncé - comptée en bonus).
   De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x + 5) = +\infty$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$.

2. Soit x un réel. $h'(x) = 2 e^{2x} - 6 e^x + 4$.
   Or, $2(e^x - 1)(e^x - 2) = 2(e^{2x} - 2 e^x - e^x + 2) = 2 e^{2x} - 6 e^x + 4$.
   Donc $\boxed{h'(x) = 2(e^x - 1)(e^x - 2).}$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff e^x \geqslant e^0 \iff x \geqslant 0$.
   $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } e^x - 1 \geqslant 0 \text{ est } [0, +\infty[.}$
   $e^x - 2 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 2 \iff e^x \geqslant e^{\ln(2)} \iff x \geqslant \ln(2)$.
   $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } e^x - 2 \geqslant 0 \text{ est } [\ln(2), +\infty[.}$

   (b) On obtient :

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. $h(0) = 1 - 6 + 5 = 0$
   et $h(\ln(2)) = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 6 e^{\ln(2)} + 4\ln(2) + 5 = 4 - 12 + 4\ln(2) + 5 = 4\ln(2) - 3$.

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$+\infty$
h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$4\ln(2) - 3$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Les points communs à $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{D}$ sont les $(x, h(x))$ tels que $h(x) = 4x + 5$.
   $h(x) = 4x + 5 \Leftrightarrow e^{2x} - 6 e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 6) = 0 \Leftrightarrow e^x = 6 \Leftrightarrow x = \ln(6)$, (car $e^x \neq 0$). $\boxed{\text{La courbe } \mathcal{C}_h \text{ et la droite } \mathcal{D} \text{ ont un point commun d'abscisse } \ln(6).}$