DEVOIR MAISON 13

À rendre le mardi 6 juin 2023

Exercice 1

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (4x-y+5z, -2x-y-z, -4x+y-5z) \end{array}$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. (a) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Soit $\mathcal{B}_1$ la famille formée des vecteurs des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ trouvées précédemment. Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

3. (a) Expliciter, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f^2(x,y,z)$.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ puis une base de $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$.
   (c) Soit $\mathcal{B}_2$ la famille formée des vecteurs des bases de $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$ trouvées précédemment. Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

Une urne contient initialement 1 boule rouge et 1 boule blanche. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement « on pioche une boule rouge au n-ième tirage ».

1. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.

2. Déterminer la loi de X_1 et son espérance.

3. Déterminer la loi de X_2 et son espérance.

4. (a) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Supposons que l'événement $[X_n = k]$ est réalisé. Donner la composition de l'urne à l'issue de l'étape n (nombre de boules rouges, nombre de boules blanches, nombre total de boules).
   (b) Soient ℓ et n deux entiers naturels. Déterminer alors les probabilités conditionnelles suivantes :
   $$P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1}=\ell), \quad P_{[X_n=\ell-1]}(X_{n+1}=\ell), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \quad \text{avec } k \notin \{\ell-1, \ell\}$$
   (c) En déduire que, pour tout $\ell \in [\![0, n+1]\!]$,
   $$P(X_{n+1}=\ell) = P(X_n=\ell) \times \frac{n-\ell+1}{n+2} + P(X_n=\ell-1) \times \frac{\ell}{n+2}.$$
   (d) En raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $P(X_n=\ell) = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$.

5. Déterminer l'espérance et la variance de X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.