Devoir maison 13 – Corrigé

Exercice 1

1. Pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, et pour tous $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f(\lambda u+\mu v) &= f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')\\ &= (4(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')+5(\lambda z+\mu z'),\\ &\qquad -2(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')-(\lambda z+\mu z')\\ &\qquad\qquad -4(\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')-5(\lambda z+\mu z'))\\ &= \lambda(4x-y+5z,-2x-y-z,-4x+y-5z)\\ &\qquad +\mu(4x'-y'+5z',-2x'-y'-z',-4x'+y'-5z')\\ &= \lambda f(u)+\mu f(v)\end{aligned}$$

f est donc une application linéaire.

2. (a) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$u\in\mathrm{Ker}(f)\iff f(u)=0\iff\begin{cases}4x-y+5z=0\\-2x-y-z=0\\-4x+y-5z=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}4x-y+5z=0\\-3y+3z=0 & (L_2\longleftarrow 2L_2+L_1)\\0=0 & (L_3\longleftarrow L_3+L_1)\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}4x-y=-5z\\y=z\end{cases}\iff\begin{cases}x=-z\\y=z\end{cases}$$

$$\iff u=z(-1,1,1)$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\,(u_1)$ avec $u_1=(-1,1,1)$.
La famille $((-1,1,1))$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$.
Comme elle est formée d'un seul vecteur non nul, elle est libre.
Conclusion : $((-1,1,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(b) D'après le théorème du rang, on a : $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\mathrm{Ker}(f))=3-1=2$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$.
Les vecteurs $v_1=f(1,0,0)=(4,-2,-4)$ et $v_2=f(0,1,0)=(-1,-1,1)$ sont dans $\mathrm{Im}(f)$.

De plus,

$$av_1+bv_2=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}4a-b=0\\-2a-b=0\\-4a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4a\\-6b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=0$$

Ainsi, (v_1,v_2) est une famille libre de deux vecteurs, dans un espace vectoriel de dimension 2 : $((4,-2,-4),(-1,-1,1))$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) On veut savoir si la famille $\mathcal{B}_1=(u_1,v_1,v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Or,

$$au_1+bv_1+cv_3=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}-a+4b-c=0\\a-2b-c=0\\a-4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{-a}+4b-c=0\\2b-2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3c\\b=c\end{cases}$$

Il y a une infinité de solutions, donc la famille $\mathcal{B}_1$ est liée, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) Après calculs (à détailler sur la copie),

$$\boxed{f^2(x,y,z)=(-2x+2y-4z,-2x+2y-4z,2x-2y+4z)}$$

(b) *Détermination d'une base de* $\mathrm{Ker}(f^2)$
Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$u\in\mathrm{Ker}\left(f^2\right)\iff f^2(u)=0\iff\begin{cases}-2x+2y-4z=0\\-2x+2y-4z=0\\2x-2y+4z=0\end{cases}\iff x=y-2z$$

$$\iff u=y(1,1,0)+z(-2,0,1)$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)=\mathrm{Vect}\,(u_2,u_3)$ avec $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(-2,0,1)$.
De plus,

$$au_2+bu_3=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=0\\a=0\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=0$$

La famille (u_2,u_3) est donc libre. (u_2,u_3) est une base de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ avec $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(-2,0,1)$.

Détermination d'une base de $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$

Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 1$, et comme $v_3 = f^2(1,0,0) = (-2,-2,2) \neq (0,0,0)$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f^2)$, on en déduit que (v_3) est famille libre de $\mathrm{Im}(f^2)$ de cardinal 1.

Conclusion : (v_3) est une base de $\mathrm{Im}(f^2)$ avec $v_3 = (2,-2,2)$.

(c) Notons $\mathcal{B}_2 = (u_2, u_3, v_3)$.

$$au_2 + bu_3 + cv_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + 2c = 0 \\ a - 2c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8c = 0 \\ a = 2c \\ b = -2c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

Donc $\mathcal{B}_2$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

1. En n épreuves, on peut ajouter de 0 à n boules rouges, donc $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

2. $X_1(\Omega) = [\![0,1]\!]$.
$P(X_1 = 0) = P(\overline{R_1}) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X_1 = 1) = P(R_1) = \dfrac{1}{2}$. Donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,1]\!])$.
Ainsi, $E(X_1) = \dfrac{1}{2}$.

3. $X_2(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
$P(X_2 = 0) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = P(\overline{R_1}) P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

$P(X_2 = 2) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) P_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Enfin, $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{3}$. Donc $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,2]\!])$.
Ainsi, $E(X_2) = \dfrac{2}{2} = 1$.

4. (a) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Supposons que $[X_n = k]$ est réalisé. On a réalisé n tirages et ajouté k boules rouges. L'urne contient donc : $k+1$ boules rouges ; $n-k+1$ boules blanches ; $n+2$ boules au total.

(b)

$$P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = \ell) = P_{[X_n=\ell]}(\overline{R_{n+1}}) = \frac{n-\ell+1}{n+2}$$

$$P_{[X_n=\ell-1]}(X_{n+1} = \ell) = P_{[X_n=\ell-1]}(R_{n+1}) = \frac{\ell}{n+2}$$

et si $k \notin \{\ell-1, \ell\}$, $P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) = 0$.

(c) Soit $\ell \in [\![0, n+1]\!]$.
$\left([X_n = k]\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = \ell) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) \\ &= P(X_n = \ell) P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = \ell) \\ &\quad + P(X_n = \ell-1) P_{[X_n=\ell-1]}(X_{n+1} = \ell) \\ &\quad + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k\notin\{\ell,\ell-1\}}} P(X_n = k) P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) \\ &= P(X_n = \ell) \times \frac{n-\ell+1}{n+2} + P(X_n = \ell-1) \times \frac{\ell}{n+2} + 0 \\ &= P(X_n = \ell) \times \frac{n-\ell+1}{n+2} + P(X_n = \ell-1) \times \frac{\ell}{n+2}. \end{aligned}$$

(d) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\forall \ell \in [\![0,n]\!],\ P(X_n = \ell) = \dfrac{1}{n+1}$.

- Initialisation : $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall \ell \in [\![0,n]\!],\ P(X_n = \ell) = \dfrac{1}{n+1}$. Soit $\ell \in X_{n+1}(\Omega) = [\![0,n+1]\!]$. Pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$, ℓ et $\ell-1$ sont dans $[\![0,n]\!]$ donc

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = \ell) &= P(X_n = \ell) \times \frac{n-\ell+1}{n+2} + P(X_n = \ell-1) \times \frac{\ell}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n-\ell+1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{(\ell-1)+1}{n+2} + 0 \\ &= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Et, puisque $P(X_n = -1) = P(X_n = n+1) = 0$, on a aussi :
$P(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} + 0 \times \dfrac{0}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$
$P(X_{n+1} = n+1) = 0 \times \dfrac{0}{n+2} + \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$.

Conlusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall \ell \in [\![0,n]\!],\ P(X_n = \ell) = \dfrac{1}{n+1}$.

5. $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!])$. D'après le cours, $E(X_n) = \dfrac{n}{2}$
et $V(X_n) = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{12} = \dfrac{n^2+2n}{12}$.