DEVOIR MAISON 13*

À rendre le mardi 6 juin 2023

Exercice 1

On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (4x-y+5z, -2x-y-z, -4x+y-5z) \end{array}$$

1. Expliciter, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f^2(x,y,z)$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}\left(f^2\right)$ puis une base de $\text{Im}\left(f^2\right)$.
3. Soit $\mathcal{B}$ la famille formée des vecteurs des bases de $\text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$ trouvées précédemment. Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

On considère une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$f^2 + 3f + 2\text{id}_{\mathbb{R}^3} = 0, \quad f \neq -\text{id}_{\mathbb{R}^3} \text{ et } f \neq -2\text{id}_{\mathbb{R}^3}.$$

1. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
2. (a) Montrer que $(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f + 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$.
   (b) Démontrer par l'absurde que $g = f + \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas bijective.
   (c) En déduire que $\dim(\text{Ker}(g)) \geqslant 1$.
   On a de même, $\dim(\text{Ker}(f + 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})) \geqslant 1$, *on ne demande pas de le montrer.*
3. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ appartenant à $\text{Ker}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ appartenant à $\text{Ker}(f + 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   Justifier que la famille (u, v) est libre.

Exercice 3

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement « on pioche une boule rouge au n-ième tirage ».

1. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.

Partie 1 - Cas a = b = 1

2. Déterminer la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi de X_2 et son espérance.

4. (a) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Supposons que l'événement $[X_n = k]$ est réalisé. Donner la composition de l'urne à l'issue de l'étape n (nombre de boules rouges, nombre de boules blanches, nombre total de boules).

   (b) Soient ℓ et n deux entiers naturels. Déterminer alors les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = \ell), \quad P_{[X_n=\ell-1]}(X_{n+1} = \ell), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) \quad \text{avec } k \notin \{\ell - 1, \ell\}$$

   (c) En déduire que, pour tout $\ell \in [\![0, n+1]\!]$,

$$P(X_{n+1} = \ell) = P(X_n = \ell) \times \frac{n - \ell + 1}{n+2} + P(X_n = \ell - 1) \times \frac{\ell}{n+2}.$$

   (d) En raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $P(X_n = \ell) = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$.

5. Déterminer l'espérance et la variance de X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 2 - Cas a = 2 et b = 1

On considère dans cette partie que $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 1}$, c'est-à-dire que l'urne contient au départ deux boules rouges et une boule blanche.

6. Déterminer la loi de X_1.

7. Déterminer la loi de X_2.

8. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculer la probabilité suivante :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{R_n}).$$

   On l'exprimera à l'aide de factorielles.

9. Justifier alors que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}.$$

10. Simplifier $P(X_n = k)$ puis calculer $E(X_n)$.