# Devoir maison 13 – Corrigé

## Exercice 1

1. $f^2(x,y,z) = (-2x+2y-4z, -2x+2y-4z, 2x-2y+4z)$.

2. *Détermination d'une base de* $\mathrm{Ker}(f^2)$

   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$u\in \mathrm{Ker}\left(f^2\right) \iff f^2(u)=0 \iff \begin{cases} -2x+2y-4z=0 \\ -2x+2y-4z=0 \\ 2x-2y+4z=0 \end{cases} \iff x=y-2z$$
$$\iff u=y(1,1,0)+z(-2,0,1)$$

   Par conséquent, $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)=\mathrm{Vect}\left(u_2,u_3\right)$ avec $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(-2,0,1)$.

   De plus,

$$au_2+bu_3=(0,0,0)\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0$$

   La famille $(u_2,u_3)$ est donc libre.

   $(u_2,u_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ avec $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(-2,0,1)$.

   *Détermination d'une base de* $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$

   Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f^2)=1$, et comme $v_3=f^2(1,0,0)=(-2,-2,2)\neq(0,0,0)$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f^2)$, on en déduit que $(v_3)$ est famille libre de $\mathrm{Im}(f^2)$ de cardinal 1.

   Conclusion : $(v_3)$ est une base de $\mathrm{Im}(f^2)$ avec $v_3=(2,-2,2)$.

3. Notons $\mathcal{B}=(u_2,u_3,v_3)$.

$$au_2+bu_3+cv_3=(0,0,0)\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+2c=0 \\ a-2c=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8c=0 \\ a=2c \\ b=-2c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$$

   Donc $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Card}(\mathcal{B})=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

## Exercice 2

On considère une application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$f^2+3f+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}=0,\quad f\neq-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \text{ et } f\neq-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}.$$

1. On a $f^2+3f+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}=0$ donc $-\frac{1}{2}f^2-\frac{3}{2}f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ et donc $f\circ h=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ avec $h=-\frac{1}{2}f-\frac{3}{2}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. De même, en factorisant par $f$ à droite, $h\circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ donc $f$ est bijective et son application réciproque est $f^{-1}=h=-\frac{1}{2}f-\frac{3}{2}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

2. (a) $(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\circ(f+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=f^2+2f\circ\mathrm{id}_{R^3}+\mathrm{id}_{R^3}\circ f+2\mathrm{id}_{R^3}\circ\mathrm{id}_{R^3}=f^2+3f+2\mathrm{id}_{R^3}=0$.

   (b) Supposons que $g=f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ soit bijective. On dispose de l'application $g^{-1}$. On sait, d'après 2a, que $g\circ(f+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=0$ donc $g^{-1}\circ g\circ(f+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=0$ donc $f+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}=0$, c'est-à-dire $f=-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ce qui est exclu par l'énoncé. On a une contradiction. Donc $g$ n'est pas bijective.

   (c) Supposons, toujours par l'absurde, que $\dim(\mathrm{Ker}(g))<1$, c'est-à-dire $\dim(\mathrm{Ker}(g))=0$. D'après la formule du rang,

$$\mathrm{rg}(g)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\mathrm{Ker}(g))=3-0=3.$$

   Donc $\dim(\mathrm{Im}(g))=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ et $\mathrm{Im}(g)\subset\mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Im}(g)=\mathbb{R}^3$. On a alors :

   - $\dim(\mathrm{Ker}(g))=0$ donc $\mathrm{Ker}(g)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc $g$ est injective ;
   - $\mathrm{Im}(g)=\mathbb{R}^3$ donc $g$ est surjective.

   Donc $g$ est bijective, ce qui est faux. On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(g))<1$ est faux et donc $\dim(\mathrm{Ker}(g))\geqslant 1$.

   *On a de même,* $\dim(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))\geqslant 1$, *on ne demande pas de le montrer.*

3. 
   - $u\in\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ donc $f(u)+u=0_{\mathbb{R}^3}$ ou encore $f(u)=-u$.
   - $v\in\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ donc $f(v)+2v=0_{\mathbb{R}^3}$ ou encore $f(v)=-2v$.

   Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $au+bv=0_{\mathbb{R}^3}$. Appliquons la fonction $f$. Par linéarité :

$$af(u)+bf(v)=f(0_{\mathbb{R}^3})\ \text{ donc }\ -au-2bv=0_{\mathbb{R}^3}.$$

On a alors un système de deux égalités :

$$\begin{cases} au+bv=0_{\mathbb{R}^3} \\ -au-2bv=0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} au+bv=0_{\mathbb{R}^3} \\ -bv=0_{\mathbb{R}^3} \quad L_2 \leftarrow L_2+L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} au+bv=0_{\mathbb{R}^3} \\ b=0 \quad \text{car } v \neq 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} au=0_{\mathbb{R}^3} \\ b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \quad \text{car } u \neq 0_{\mathbb{R}^3} \\ b=0 \end{cases}$$

Donc $(u,v)$ est libre.

## Exercice 3

1. En $n$ épreuves, on peut ajouter de 0 à $n$ boules rouges, donc $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$.

### Partie 1 - Cas a = b = 1

2. $X_1(\Omega)=[\![0,1]\!]$.
$P(X_1=0)=P(\overline{R_1})=\dfrac{1}{2}$ et $P(X_1=1)=P(R_1)=\dfrac{1}{2}$. Donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,1]\!])$.
Ainsi, $E(X_1)=\dfrac{1}{2}$.

3. $X_2(\Omega)=[\![0,2]\!]$.
$P(X_2=0)=P(\overline{R_1}\cap\overline{R_2})=P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

$P(X_2=2)=P(R_1\cap R_2)=P(R_1)P_{R_1}(R_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

Enfin, $P(X_2=1)=1-P(X_2=0)-P(X_2=2)=\dfrac{1}{3}$. Donc $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,2]\!])$.
Ainsi, $E(X_2)=\dfrac{2}{2}=1$.

4. (a) Soient $k$ et $n$ deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Supposons que $[X_n=k]$ est réalisé. On a réalisé $n$ tirages et ajouté $k$ boules rouges. L'urne contient donc : $k+1$ boules rouges ; $n-k+1$ boules blanches ; $n+2$ boules au total.

(b)

$$P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1}=\ell)=P_{[X_n=\ell]}(\overline{R_{n+1}})=\frac{n-\ell+1}{n+2}$$

$$P_{[X_n=\ell-1]}(X_{n+1}=\ell)=P_{[X_n=\ell-1]}(R_{n+1})=\frac{\ell}{n+2}$$

et si $k\notin\{\ell-1,\ell\}$,

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell)=0.$$

(c) Soit $\ell\in[\![0,n+1]\!]$.
$\big([X_n=k]\big)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=\ell) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \\ &= P(X_n=\ell)P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1}=\ell) \\ &\quad + P(X_n=\ell-1)P_{[X_n=\ell-1]}(X_{n+1}=\ell) \\ &\quad + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k\notin\{\ell,\ell-1\}}} P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \\ &= P(X_n=\ell)\times\frac{n-\ell+1}{n+2}+P(X_n=\ell-1)\times\frac{\ell}{n+2}+0 \\ &= P(X_n=\ell)\times\frac{n-\ell+1}{n+2}+P(X_n=\ell-1)\times\frac{\ell}{n+2}. \end{aligned}$$

(d) Démontrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que $X_n\hookrightarrow\mathcal{U}([\![0,n]\!])$.

- $X_1\hookrightarrow\mathcal{U}([\![0,1]\!])$ d'après la question 2.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $X_n\hookrightarrow\mathcal{U}([\![0,n]\!])$. Soit $\ell\in X_{n+1}(\Omega)=[\![0,n+1]\!]$.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=\ell) &= P(X_n=\ell)\times\frac{n-\ell+1}{n+2}+P(X_n=\ell-1)\times\frac{\ell}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+1}\times\frac{n-\ell+1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\times\frac{(\ell-1)+1}{n+2}+0 \\ &= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $\ell\in[\![0,n+1]\!]$, $P(X_{n+1}=\ell)=\dfrac{1}{n+2}$ donc $X_{n+1}\hookrightarrow\mathcal{U}([\![0,n+1]\!])$.

Conlusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

5. D'après le cours, $E(X_n) = \dfrac{n}{2}$ et $V(X_n) = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{12} = \dfrac{n^2 + 2n}{12}$.

### Partie 2 - Cas a = 2 et b = 1

On considère dans cette partie que $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 1}$, c'est-à-dire que l'urne contient au départ deux boules rouges et une boule blanche.

6. $X_1(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$.
   $P(X_1 = 0) = P(\overline{R_1}) = \dfrac{1}{3}$ et $P(X_1 = 1) = P(R_1) = \dfrac{2}{3}$.

7. $X_2(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$.
   $P(X_2 = 0) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = P(\overline{R_1}) P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{6}$.

   $P(X_2 = 2) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) P_{R_1}(R_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$.

   Enfin, $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{3}$.

8. D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
&P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{R_n}) \\
&\qquad = P(R_1) P_{R_1}(R_2) \times \cdots \times P_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) \\
&\qquad\qquad \times P_{R_1 \cap \cdots \cap R_k}(\overline{R_{k+1}}) \times \cdots \times P_{R_1 \cap \cdots \cap \overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n}) \\
&\qquad = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{k+1}{k+2} \times \frac{1}{k+3} \times \cdots \times \frac{n-k}{n+2} \\
&\qquad = \frac{(k+1)!(n-k)!}{\frac{(n+2)!}{2}} \\
&\qquad = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

9. $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si on a, lors des $n$ premiers tirages, pioché $k$ boules rouges. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de positionner ses $k$ boules rouges dans les $n$ tirages. Si ce sont les $k$ premières, on obtient l'événement

$$R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{R_n}.$$

   $[X_n = k]$ est donc la réunion de $\binom{n}{k}$ événements de ce type, événements qui sont deux à deux incompatibles et ont tous la même probabilité de se produire.

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \binom{n}{k} P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{R_n}) \\
&= \binom{n}{k} \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

10. Simplifions l'expression précédente.

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \binom{n}{k} \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \\
&= \frac{n! \times 2(k+1)!(n-k)!}{k!(n-k)! \times (n+2)!} \\
&= \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

   car $(k+1)! = k! \times (k+1)$ et $(n+2)! = n! \times (n+1)(n+2)$.