DEVOIR MAISON 12

À rendre le mardi 23 mai 2023

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^{2} (t+1)^2 \,\mathrm{d}t, \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \,\mathrm{d}t, \qquad I_3 = \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$$

et, à l'aide du changement de variable $t = 1 + \mathrm{e}^x$,

$$I_4 = \int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^x \ln(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x$$

Exercice 2

On considère la suie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 \big(\ln(1+t)\big)^n \,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Justifier que la fonction $t \mapsto (1+t)\ln(1+t) - t$ est une primitive de $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0,1]$.
   (b) Calculer u_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on précisera.
4. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$u_{n+1} = 2\big(\ln(2)\big)^{n+1} - (n+1)u_n.$$

   On pourra remarquer que $t \mapsto 1$ admet pour primitive $t \mapsto 1+t$.
   (b) Écrire une fonction python `suite(n)` qui, étant donné un entier naturel n, renvoie la valeur de u_n.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On notera H l'une de ces primitives.
2. Exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction H.
3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$, pour tout réel x.
4. Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.