Devoir maison 12 – Corrigé

Exercice 1

1. $I_1 = \left[\dfrac{(t+1)^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \dfrac{3^3}{3} - 0 = 9.$

2. $I_2 = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1.$

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 (2-x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Posons

$$\begin{aligned} u(x) &= 2-x & v(v) &= -\mathrm{e}^{-x} \\ u'(x) &= -1 & v'(x) &= \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1,2]$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_3 &= \Big[-(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \mathrm{e}^{-1} - \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]1^2 \\ &= \mathrm{e}^{-1} - \left(-\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-2}. \end{aligned}$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^x \ln(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$. Posons $t = 1 + \mathrm{e}^x$. $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

$$\frac{\mathrm{e}^x \ln(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(t)}{t} \times (\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x) = \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

¨Par changement de variable,

$$I_4 = \int_2^3 \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_2^3 = \frac{\ln(3)^2}{2} - \frac{\ln(2)^2}{2}.$$

Exercice 2

1. (a) Soit $F : t \mapsto (1+t)\ln(1+t) - t$.
   - $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto t+1$ est dérivable et strictement positive sur $[0,1]$ donc par composée $t \mapsto \ln(1+t)$ est dérivable sur $[0,1]$. Par produit et somme, F est dérivable sur $[0,1]$.
   - Soit $t \in [0,1]$.

   $$F'(t) = \ln(1+t) + (1+t) \times \frac{1}{1+t} - 1 = \ln(1+t).$$

   Ainsi $F : t \mapsto (1+t)\ln(1+t) - t$ est une primitive de $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0,1]$.

   (b)
   $$u_1 = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \Big[(1+t)\ln(1+t) - t\Big]_0^1 = 2\ln(2) - 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \text{donc } & 1 \leqslant 1+t \leqslant 2 \\ \text{donc } & 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln(2) && \text{car } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{donc } & 0 \leqslant \ln(1+t)^n \leqslant \ln(2)^n && \text{car } x \mapsto x^n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale avec $0 \leqslant 1$:

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \ln(1+t)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \ln(2)^n\,\mathrm{d}t$$
$$0 \leqslant u_n \leqslant \ln(2)^n.$$

3. $1 < 2 < \mathrm{e}$ donc $0 < \ln(2) < 1$ par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2)^n = 0$. D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

4. (a) Posons

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(1+t)^{n+1} & v(t) &= t+1 \\ u'(t) &= \frac{n+1}{1+t}\ln(1+t)^n & v'(t) &= 1 \end{aligned}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \Big[(t+1)\ln(1+t)^{n+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\ln(1+t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= 2\big(\ln(2)\big)^{n+1} - (n+1)u_n \end{aligned}$$

(b)
```python
import numpy as np
def suite(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = 2*np.log(2)^(k+1) - (k+1)*u
    return u
```

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto x^2+1$ l'est sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $x^2+1>0$ donc par composée puis quotient, h est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, h admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit H l'une de ses primitives.

2. $f(x) = \Big[H(t)\Big]_x^{2x} = H(2x) - H(x)$.

3. Puisque H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H' = h$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Ceci montre que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Puisque $x \mapsto 2x$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors, par composée et différence H f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $f'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2h(2x) - h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $f'(x) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x^2} \geqslant \sqrt{1+4x^2} && \text{car } \sqrt{1+x^2} > 0,\ \sqrt{1+4x^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(2\sqrt{1+x^2}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{1+4x^2}\right)^2 && \text{par stricte croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow 4+4x^2 \geqslant 1+4x^2 \\ &\Leftrightarrow 4 \geqslant 1 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, par équivalence la première l'est aussi. Donc $f'(x) \geqslant 0$. Ainsi, f est croissance sur $\mathbb{R}$.