Devoir maison 12*

À rendre le mardi 23 mai 2023

Exercice 1

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0.
2. (a) Démontrer que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant (1-t)^n \leqslant 1$.
   (b) Démontrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{n!}$.
   (c) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on précisera.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}.$$
4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
5. En déduire une démonstration de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ et de la valeur de sa somme.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t.$$
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geqslant \ln(n+1)$.
3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$?

Exercice 3

On définit la fonction f sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$, $f(1) = -\ln(2)$ et
$$\text{pour tout } x \in]0,1[, \; f(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $[0,1]$.
2. Justifier que $f(x) \leqslant 0$ pour $x \in]0,1[$.
3. (a) Pour $x \in]0,1[$, calculer $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$. *Simplifier au maximum.*
   (b) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $-x\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant -x^2\ln(2)$.
   Indication : si $x^2 \leqslant t \leqslant x$, alors $\dfrac{x^2}{t} \leqslant \ldots \leqslant \ldots$.
   (c) Démontrer alors que f est continue en 0 et en 1.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, donner sa dérivée et ses variations sur cet intervalle.