Devoir maison 12* – Corrigé

Exercice 1

1. $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$

2. (a) Soit $t \in [0,1]$. Puisque $t \mapsto 1-t$ est décroissante, $1-1 \leqslant 1-t \leqslant 1-0$ donc $0 \leqslant 1-t \leqslant 1$. De plus, $t \mapsto t^n$ est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donc $0 \leqslant (1-t)^n \leqslant 1^n$ c'est-à-dire $0 \leqslant (1-t)^n \leqslant 1$.

   (b) Soit $t \in [0,1]$. On a : $0 \leqslant (1-t)^n \leqslant 1$. Puisque $\mathrm{e}^t > 0$, on obtient : $0 \leqslant (1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^t$. Par croissance de l'intégrale entre 0 et 1 ($0 \leqslant 1$),

$$\int_0^1 0 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = I_0$$

   donc, en divisant ar $n! > 0$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{I_0}{n!} = \frac{\mathrm{e}-1}{n!}.$$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}-1}{n!} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$. Posons

$$u(t) = (1-t)^{n+1} \qquad v(t) = \mathrm{e}^t$$
$$u'(t) = -(n+1)(1-t)^n \qquad v'(t) = \mathrm{e}^t$$

   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} \times (n+1)\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} + I_n \end{aligned}$$

4. Procédons par récurrence.

   Initialisation : pour $n = 0$, $I_0 = \mathrm{e}-1$ et $\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - \frac{1}{0!} = \mathrm{e}-1$. Donc $I_0 = \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!} = \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!} = \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}.$$

   D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} - 0 = \mathrm{e} \in \mathbb{R}$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

Exercice 2

1. Soit $t \in [k, k+1]$. Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{t}$. Par croissance de l'intégrale entre k et $k+1$ ($k \leqslant k+1$),

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k} \,\mathrm{d}t \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$$

   donc

$$\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t.$$

2. Méthode 1 : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(|t|)\Big]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k)$.
En reprenant l'inégalité précédente et par croissance de la somme,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$
par télescopage. On a donc bien : $H_n \geqslant \ln(n+1)$.
Méthode 2 : Par croissance de la somme,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$
Or, d'après la relation de Chasles,
$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_2^3 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$
De plus,
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(|t|)\Big]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$
Donc $H_n \geqslant \ln(n+1)$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc, par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty \notin \mathbb{R}$. Ceci montre que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice 3

1. f est bien définie en 0 et en 1. Sur $]0,1[$, il faut montrer que l'intégrale $f(x)$ existe. C'est bien le cas car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur
$$\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid \ln(x) \neq 0\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$$
donc sur $]0,1[$ et, pour $x \in]0,1[$, x^2 et x sont bien dans l'intervalle $]0,1[$.

2. Soit $x \in]0,1[$. On a alors $0 < x^2 \leqslant x < 1$. Soit $t \in [x^2, x]$. Alors $t \in]0,1[$ donc $\ln(t) < 0$ et $\dfrac{1}{\ln(t)} < 0$. Par croissance de l'intégrale (on a bien $x^2 \leqslant x$) :
$$f(x) \leqslant \int_{x^2}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

3. (a) $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \Big[\ln(|\ln(t)|)\Big]_{x^2}^{x} = \ln(|\ln(x)|) - \ln(|\ln(x^2)|)$.
Or $\ln(x) < 0$ et $\ln(x^2) = 2\ln(x) < 0$.
$\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \ln\left(\frac{-\ln(x)}{-2\ln(x)}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

(b) Soit $x \in]0,1[$ et soit $t \in [x^2, x]$.
$x^2 \leqslant t \leqslant x$, donc $\dfrac{x^2}{t} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{x}{t}$ car $t > 0$. En multipliant par $\dfrac{1}{\ln(t)} < 0$, on obtient :
$$\frac{x^2}{t\ln(t)} \geqslant \frac{1}{\ln(t)} \geqslant \frac{x}{t\ln(t)}.$$
Par croissance de l'intégrale ($x^2 \leqslant x$) :
$$\int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} \frac{x}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$
En utilisant le résultat de la question 3a, on a montré :
$$-x^2\ln(2) \geqslant f(x) \geqslant -x\ln(2).$$

(c) $\lim\limits_{x\to0^+} -x^2\ln(2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} -x\ln(2) = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 = f(0)$.
$\lim\limits_{x\to1^-} -x^2\ln(2) = -\ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} -x\ln(2) = -\ln(2)$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\ln(2) = f(1)$.
Ainsi, f est continue en 0 et en 1.

4. Soit $g : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$, qui est continue sur $]0,1[$. Notons G une primitive de g sur $]0,1[$.
Pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = G(x) - G(x^2)$. Or, G est dérivable sur $]0,1[$ et $G' = g$ est continue sur $]0,1[$, donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. De plus, $x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et, pour $x \in]0,1[$, $x^2 \in]0,1[$. Ainsi, par composée, $x \mapsto G(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. Par différence, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(x) - 2xG'(x^2) = g(x) - 2xg(x^2) \\ &= \frac{1}{\ln(x)} - \frac{2x}{\ln(x^2)} = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{2x}{2\ln(x)} \\ &= \frac{1-x}{\ln(x)} < 0 && \text{car } 0 < x < 1 \end{aligned}$$
f est strictement décroissante sur $]0,1[$.