DEVOIR MAISON 11

À rendre le mardi 9 mai 2023

Exercice 1

On considère l'application $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y-z, 2x+4y-2z, x+y+z) \end{array}$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. (a) Montrer que $g^2 - 6g + 8\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = 0$.
   (b) Montrer que g est bijective et déterminer l'expression de g^{-1}.
   (c) Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
3. (a) Donner l'expression de $h_1(x,y,z) = (g - 4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(x,y,z)$ et celle de $h_2(x,y,z) = (g - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(x,y,z)$.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(h_1)$. On la notera (u_1).
   (c) Déterminer une base de $G = \mathrm{Ker}(h_2)$. On la notera (u_2, u_3).
   (d) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

On considère trois urnes : l'urne U_1 contient deux boules rouges et trois boules bleues, l'urne U_2 contient une boule rouge et aucune boule bleue et l'urne U_3 contient une boule bleue et aucune boule rouge.On choisit d'abord une de ces trois urnes au hasard avec équiprobabilité. Une fois cette urne choisie, on effectue dans cette urne et sans jamais en changer une série illimitée de tirages d'une boule, avec remise dans cette urne.
Pour $i = 1, 2, 3$ on note U_i l'événement : « l'urne choisie pour les tirages est l'urne U_i ».
Pour tout entier naturel non nul k, on note R_k :« le k-ième tirage a amené une boule rouge ».

1. Soit $k \in \mathbb{N}^{\times}$. Donner les probabilités conditionnelles $P_{U_1}(R_k)$, $P_{U_2}(R_k)$, $P_{U_3}(R_k)$.
   En déduire $P(R_k)$.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier que $P_{U_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (b) Démontrer que $P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \dfrac{1}{3}$.
3. Montrer que les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.
4. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) = \dfrac{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^k}{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « une boule bleue apparaît pour la première fois au n-ième tirage ».

5. Justifier que $P(A_1) = \dfrac{8}{15}$.
6. Soit un entier $n \geqslant 2$. Déterminer $P(A_n)$.
7. En déduire la probabilité de l'événement A_0 : « ne jamais obtenir de boule bleue ».