DEVOIR MAISON 11 – CORRIGÉ

Exercice 1

On considère l'application $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y-z, 2x+4y-2z, x+y+z) \end{array}$

1. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2$, en écrivant $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$, on a :

$$\begin{aligned} g(au+bv) &= g(ax+bx', ay+by', az+bz') \\ &= \big(3(ax+bx')+(ay+by')-(az+bz'), \\ &\qquad 2(ax+bx')+4(ay+by')-2(az+bz'), \\ &\qquad (ax+bx')+(ay+by')+(az+bz')\big) \\ &= a(3x+4y-2z, 3x+4y-2z, x+y+z) \\ &\qquad + b(3x'+4y'-2z', 3x'+4y'-2z', x'+y'+z') \\ &= ag(u)+bg(v) \end{aligned}$$

$\boxed{g \text{ est donc une application linéaire.}}$

2. (a) Soit $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} g^2(u) &= g(g(x,y,z)) \\ &= g(3x+y-z, 2x+4y-2z, x+y+z) \\ &= \big(3(3x+y-z)+(2x+4y-2z)-(x+y+z), \\ &\qquad 2(3x+y-z)+4(2x+4y-2z)-2(x+y+z), \\ &\qquad (3x+y-z)+(2x+4y-2z)+(x+y+z)\big) \\ &= (10x+6y-6z, 12x+16y-12z, 6x+6y-2z) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (g^2-6g+8\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u) &= g^2(u)-6g(u)+8u \\ &= (10x+6y-6z, 12x+16y-12z, 6x+6y-2z) \\ &\qquad -6(3x+y-z, 2x+4y-2z, x+y+z)+8(x,y,z) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{g^2-6g+8\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}=0}$.

(b) On a : $g\circ(g-6\mathrm{id}) = -8\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ puis $g\circ\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ avec $\varphi = -\frac{1}{8}(g-6\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. On a de même, $\varphi\circ g = -\frac{1}{8}(g^2-6g) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. Donc $\boxed{g \text{ est bijective}}$. Son application réciproque est : $\boxed{g^{-1}=\varphi=-\frac{1}{8}(g-6\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})}$. On calcule alors

$$\begin{aligned} g^{-1}(x,y,z) &= -\frac{1}{8}\big(g(x,y,z)-6(x,y,z)\big) \\ &= -\frac{1}{8}\big(-3x+y-z, 2x-2y-2z, x+y-5z\big) \end{aligned}$$

(c) Puisque g est bijective, elle est injective et surjective et donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g)=\{(0,0,0)\} \text{ et } \mathrm{Im}(g)=\mathbb{R}^3.}$$

3. (a) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$h_1(x,y,z) = g(x,y,z)-4(x,y,z) = (-x+y-z, 2x-2z, x+y-3z)$$

$$h_2(x,y,z) = g(x,y,z)-2(x,y,z) = (x+y-z, 2x+2y-2z, x+y-z)$$

(b) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u\in\mathrm{Ker}(h_1) &\iff (-x+y-z, 2x-2z, x+y-3z)=(0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} -x+y-z = 0 \\ 2x-2z = 0 \\ x+y-3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x+y-z = 0 & \\ 2y-4z = 0 & (L_2 \longleftarrow L_2+2L_1) \\ 2y-4z = 0 & (L_3 \longleftarrow L_3+L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \\ &\iff u = z(1,2,1) \\ &\iff u\in\mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,2,1)}_{u_1}\big) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(h_1)=\mathrm{Vect}(u_1)$. La famille (u_1) est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(h_1)$. Puisqu'elle est formée d'un seul vecteur qui est non nul, elle est libre.
Conclusion : $\boxed{\text{une base de } \mathrm{Ker}(h_1) \text{ est } (u_1) \text{ avec } u_1=(1,2,1).}$

(c) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \mathrm{Ker}(h_2) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ 2x+2y-2z &=& 0 \\ x+y-z &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff x+y-z=0$$
$$\iff z = x+y$$
$$\iff u = (x, y, x+y)$$
$$\iff u = x\underbrace{(1,0,1)}_{u_2} + y\underbrace{(0,1,1)}_{u_3}$$
$$\iff u \in \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(h_2) = \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$. La famille (u_2, u_3) est donc génératrice de $G\mathrm{Ker}(h_2)$. De plus,

$$au_2 + bu_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow (a, b, a+b) = (0,0,0) \Leftrightarrow a = b = 0$$

donc (u_2, u_3) est libre.
$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Ker}(h_2) \text{ est } (u_2, u_3) \text{ avec } u_2 = (1,0,1) \text{ et } u_3 = (0,1,1).}$

(d) Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = u \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = x \\ 2a+c = y \\ a+b+c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = x \\ 2a+c = y \\ c = z-x & (L_3 - L_1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ a = \frac{1}{2}(x+y-z) \\ c = z-x \end{cases}$$

Ce système a, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, une unique solution.
$\boxed{\text{Donc } (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

Exercice 2

1. $\boxed{P_{U_1}(R_k) = \frac{2}{5},\ P_{U_2}(R_k) = 1,\ P_{U_3}(R_k) = 0}$. Or, (U_1, U_2, U_3) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$P(R_k) = P(U_1)P_{U_1}(R_k) + P(U_2)P_{U_2}(R_k) + P(U_3)P_{U_3}(R_k) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times 0.$$

$$\boxed{P(R_k) = \frac{7}{15}}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les tirages dans U_1 sont indépendants car réalisés avec remise. Ainsi,

$$\boxed{P_{U_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = P_{U_1}(R_1) \times P_{U_1}(R_2) \times \cdots \times P_{U_1}(R_n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

(b) De même, $P_{U_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = 1^n = 1$ et $P_{U_3}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = 0^n = 0$. Toujours avec la même formule des probabilités totales :

$$P(\underbrace{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}_{R}) = P(U_1)P_{U_1}(R) + P(U_2)P_{U_2}(R) + P(U_3)P_{U_3}(R)$$
$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0$$

$$\boxed{P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}}$$

(formule non valable pour $n = 0$).

3. $P(R_1) = P(R_2) = \frac{7}{15}$ et $P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{29}{75} \neq P(R_1)P(R_2)$.
$\boxed{R_1 \text{ et } R_2 \text{ ne sont pas indépendants}}$.

4. Pour $k \geqslant 2$ $(k - 1 \neq 0)$

$$P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap R_k)}{P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1})} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^k + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + \frac{1}{3}} \times \frac{3}{3}$$

$$\boxed{P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}+1}}$$

5. $\boxed{P(A_1) = P(\overline{R_1}) = 1 - P(R_1) = \frac{8}{15}}$.

6. Pour $n \geqslant 2$ (donc $n-1 \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= P(R_1 \cap \dots R_{n-1} \cap \overline{R_n}) \\
&= P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n-1}) P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{n-1}}(\overline{R_n}) \\
&= P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n-1}) \left(1 - P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{n-1}}(R_n)\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+1} \\
&= \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + 1\right)\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+1} \\
&= \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n} + 1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{5}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(A_n) = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}$$

Remarquons que cette formule n'est pas valable pour $n = 1$.

7. $\overline{A_0} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$: « obtenir au moins une boule bleue ». Les événements A_n étant deux à deux incompatibles, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(A_n)$ converge et $P(\overline{A_0}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$.

Il faut bien penser ici à mettre de côté le $P(A_1)$ dont l'expression diffère des autres termes.

$$\begin{aligned}
P(\overline{A_0}) &= P(A_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n) \\
&= \frac{8}{15} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\
&= \frac{8}{15} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n} \\
&= \frac{8}{15} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{2}{5}} \\
&= \frac{8}{15} + \frac{2}{25} \times \frac{5}{3} \\
&= \frac{10}{15} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(A_0) = \frac{1}{3}}$.

C'est le résultat intuitif : cela correspond à choisir l'urne 2 au départ.