

DEVOIR MAISON 10

À rendre le mardi 4 avril 2023

Exercice 1

On considère les ensembles

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 3z + t = 3x + y + 2z + 2t = 0\}$$

$$G = \{(-5a + b, a + 3b, 2a + 2b, 5a - 5b)\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une base.
3. (a) Démontrer que $G \subset F$.
(b) Démontrer que $F \subset G$.
(c) Que peut-on en déduire?

Exercice 2

Démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (0, 2, 1)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) ; \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n! - 10^n}{n! \times 5^n}.$$