Devoir maison 10 – Corrigé

Exercice 1

1. $F \subset \mathbb{R}^4$.
Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
u \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \boxed{y} + 3z + t = 0 \\ 3x + y + 2z + 2t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \boxed{y} + 3z + t = 0 \\ 5x + 5z + 3t = 0 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \boxed{y} + 3z + t = 0 \\ x + z + \frac{3}{5}t = 0 \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\boxed{y} + z - \frac{1}{5}t = 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \boxed{x} + z + \frac{3}{5}t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y} = z - \frac{1}{5}t \\ \boxed{x} = -z - \frac{3}{5}t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow u = z\underbrace{(-1, 1, 1, 0)}_{u_1} + t\underbrace{(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 1)}_{u_2} \\
&\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).}$ On en déduit que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ et que (u_1, u_2) est génératrice de F.
De plus, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$au_1 + bu_2 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -a - \frac{3}{5}b = 0 \\ a - \frac{1}{5}b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

donc (u_1, u_2) est libre. Par conséquent,
$\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } F, \text{ avec } u_1 = (-1, 1, 1, 0) \text{ et } u_2 = (-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 1)}$.

2. $G \subset \mathbb{R}^4$.
Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(-5a + b, a + 3b, 2a + 2b, 5a - 5b) = a\underbrace{(-5, 1, 2, 5)}_{v_1} + b\underbrace{(1, 3, 2, -5)}_{v_2}$$

Donc $\boxed{G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2).}$ On en déduit que $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ et que (v_1, v_2) est génératrice de G.
De plus, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$av_1 + bv_2 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + b = 0 \\ a + 3b = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ 5a - 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b = 0 \\ 4b = 0 \\ 4b = 0 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

donc (v_1, v_2) est libre. Par conséquent,
$\boxed{(v_1, v_2) \text{ est une base de } G, \text{ avec } v_1 = (-5, 1, 2, 5) \text{ et } v_2 = (1, 3, 2, -5)}$.

3. (a)
   - $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
   - $v_1 \in F$ car $\begin{cases} 2(-5) - 1 + 3 \times 2 + 5 = 0 \\ 3(-5) + 1 + 2 \times 2 + 2 \times 5 = 0 \end{cases}$

     $v_2 \in F$ car $\begin{cases} 2 \times 1 - 3 + 3 \times 2 + (-5) = 0 \\ 3 \times 1 + 3 + 2 \times 2 + 2(-5) = 0 \end{cases}$
   - F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

   D'après le cours, $\boxed{G \subset F}$.

   (b)
   - $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(u_1, \underbrace{5u_2}_{u_3})$ avec $u_3 = (-3, -1, 0, 5)$.
   - Montrons que u_1 appartient à G. On résout $av_1 + bv_2 = u_1$ car $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

$$av_1 + bv_2 = u_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + b = -1 \\ a + 3b = 1 \\ 2a + 2b = 1 \\ 5a - 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b = -1 \\ 4b = 1 \\ 4b = 1 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il y a une solution donc $u_1 \in G$.
On procède de même pour u_3.

$$av_1 + bv_2 = u_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + b = -3 \\ a + 3b = -1 \\ 2a + 2b = 0 \\ 5a - 5b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6b = -3 \\ 2b = -1 \\ a = -b \\ -10b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il y a une solution donc $u_3 \in G$.

- G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

D'après le cours, $\boxed{F \subset G}$.

(c) Par double-inclusion, $\boxed{F = G}$.

Exercice 2

- $u_1 \in \mathbb{R}^3, u_2 \in \mathbb{R}^3, u_3 \in \mathbb{R}^3$
- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 = u &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ a - b + 2c = y \\ a + b + \boxed{c} = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ -a - 3b = y - 2z & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ a + b + \boxed{c} = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} + 2b = x \\ -b = x + y - 2z & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -b + \boxed{c} = z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3x + 2y - 4z \\ b = -x - y + 2z \\ c = -2x - y + 3z \end{cases} \end{aligned}$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ cette équation admet une unique solution.
Donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

Exercice 3

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -1 \in \mathbb{R}$$

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \text{ converge}}$ et sa somme est

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = -1}.$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n! - 10^n}{n! \times 5^n} = \dfrac{1}{5^n} - \dfrac{10^n}{n! \times 5^n} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n - \dfrac{2^n}{n!}$.

Or, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{5} \in]-1, 1[$ donc elle converge, et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^n}{n!}$ est une série exponentielle, elle converge également.

Par combinaison linéaire, $\boxed{\text{la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n! - 10^n}{n! \times 5^n} \text{ converge}}$ et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! - 10^n}{n! \times 5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} - e^2 = \frac{5}{4} - e^2 .$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! - 10^n}{n! \times 5^n} = \frac{5}{4} - e^2}$$