DEVOIR MAISON 9

À rendre le mardi 21 mars 2023

Exercice 1

On note $h\colon x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(2x + \dfrac{2}{x}\right)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la fonction h. On dressera son tableau de variation complet.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
3. Montrer que, pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant h'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.
4. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \sqrt{2}|.$$
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Attention, $x^{x^2} \neq (x^x)^2$.

1. Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
4. (a) Déterminer la limite quand $x \to 0$ de $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2 \ln(x)} - 1}{x^2 \ln(x)}$.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. (a) Montrer que f réalise une bijection de $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.
   (b) On note g la réciproque associée. Dresser le tableau de variation de g.
   (c) Préciser $g(1)$ et $g(16)$.