Devoir maison 9 – Corrigé

Exercice 1

1. La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.
   Par combinaisons linéaires de limites (il n'y a aucune forme indéterminée) :
   $$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$
   Pour $x > 0$
   $$h'(x) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{2(x^2-1)}{3x^2}.$$
   $\dfrac{2}{3x^2} > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de $x^2 - 1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
   Remarquons que h est croissante sur $[1, +\infty[$ d'après la question précédente.

   Initialisation : $u_0 = 2 \geqslant 1$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 1$. $u_{n+1} = h(u_n) \geqslant h(1) = \dfrac{4}{3}$ par croissance de h sur $[1, +\infty[$. Donc $u_{n+1} \geqslant 1$.

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1.}$

3. Si $x \geqslant 1$, $h'(x) \geqslant 0$ (voir tableau de signe de $h'(x)$) et $h'(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3x^2} \leqslant \dfrac{2}{3}$ car $\dfrac{2}{3x^2} \geqslant 0$.
   $$\boxed{\forall x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{2}{3}}$$

4. h est dérivable sur $I = [1, +\infty[$ et pour tout $x \in I$, $|h'(x)| = h'(x)$ car $h'(x) \geqslant 0$ donc $|h'(x)| \leqslant \dfrac{2}{3}$.
   D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in I^2$,
   $$|h(x) - h(y)| \leqslant \frac{2}{3}|x - y|.$$
   Prenons $x = u_n \in I$, $h(x) = u_{n+1}$ et $y = \sqrt{2} \in I$, $h(y) = \sqrt{2}$. On a donc
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \sqrt{2}|}$$

5. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   Initialisation : $|u_0 - \sqrt{2}| = |2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2} \leqslant 1$ car $\sqrt{2} \geqslant 1$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   $$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.}$

6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, car $\dfrac{2}{3} \in]-1, 1[$ et on sait que $0 \leqslant |u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n - \sqrt{2}| = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}}$.

Exercice 2

1. - Sur $]0,+\infty[$, $f(x)=x^{x^2}=\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}$. Or, $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto \ln(x)$ sont continues sur $]0,+\infty[$ et $x\mapsto \mathrm{e}^x$ l'est sur $\mathbb{R}$. Par produit puis composée, f est continue sur $]0,+\infty[$.
   - En 0 : par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x)=0$ donc, par composée, $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}=1$. On a donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)=f(0)$ donc f est continue en 0.
   - Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$

2. Pour $x>0$, $f(x)=\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}$.
   Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

3. Sur $]0,+\infty[$, $f(x)=x^{x^2}=\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}$. Or, $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto\ln(x)$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et $x\mapsto \mathrm{e}^x$ l'est sur $\mathbb{R}$. Par produit puis composée, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   Pour $x>0$, $\boxed{f'(x)=(2x\ln(x)+x)\,\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}.}$

4. (a) Posons $h=x^2\ln(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ par croissance comparée.
   $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}-1}{x^2\ln(x)}=\dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}1$ par taux d'accroissement usuel.
   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}-1}{x^2\ln(x)}=1}$.

   (b) Soit $x>0$.
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}-1}{x}=\frac{\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}-1}{x^2\ln(x)}\times x\ln(x).$$
   Or, $\lim\limits_{x\to 0}x\ln(x)=0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}-1}{x^2\ln(x)}=1$ donc
   $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\in\mathbb{R}.$$
   Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0)=0.}$

5. Pour $x>0$, $f'(x)=x(2\ln(x)+1)\,\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}$. Or $x\,\mathrm{e}^{x^2\ln(x)}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2\ln(x)+1$.
   $$2\ln(x)+1\geqslant 0\Leftrightarrow \ln(x)\geqslant -\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	1	↘	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}}$	↗	$+\infty$

$$f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})=\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^{\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\times\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}}.$$

6. (a) - $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty[$ est un intervalle.
   - f est continue sur $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty[$ d'après 1).
   - f est strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty[$ car sur cet intervalle $f'(x)\geqslant 0$ et $f'(x)=0$ a un nombre fini de solutions.
   - Notons $J=[f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[=[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}},+\infty[$.

   D'après le théorème de la bijection,
   $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty[\text{ vers } J=[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}},+\infty[.}$

   (b) Le théorème dit aussi que g est strictement croissante sur J.
   $f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}}$ donc $g(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

x	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}}$		$+\infty$
g	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	↗	$+\infty$

   (c) Remarquons que $-\frac{1}{2}<0$ donc $0<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<1$ (stricte croissance de l'exponentielle).
   $f(1)=1$ et $1\in[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty[$ donc $\boxed{g(1)=1}$.
   $f(2)=2^4=16$ et $2\in[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty[$ donc $\boxed{g(16)=2}$.
   Attention, on a aussi $f(0)=1$ mais 0 n'est pas dans $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty[$ donc $g(1)\neq 0$.