Devoir maison 8

À rendre le lundi 27 février 2023
(à la rentrée des vacances)

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\ln(x))^2}{x-1} & \text{si } x>0,\ x\neq 1\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
3. (a) Étudier la fonction $\varphi : x\mapsto 2(x-1)-x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que l'équation $2(x-1)-x\ln(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0,\mathrm{e}[$ et une unique solution β dans l'intervalle $[\mathrm{e},+\infty[$.
   On précisera la valeur de α.
   (c) En déduire le tableau de signe de φ.
4. En déduire le tableau de variation de f, sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X donc la loi est donnée par

$$\begin{cases}X(\Omega)=[\![1,9]\!]\\ \forall k\in[\![1,9]\!],\quad P(X=k)=\dfrac{1}{\ln(10)}\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)\end{cases}$$

1. Justifier que la loi de X est bien définie.

   Cette loi, appelée loi de Benford, permet de modéliser la distribution de probabilités donnant le premier chiffre significatif (par exemple, pour $-0,23$, le premier chiffre significatif est 2) des nombres rencontrés par une personne dans sa vie.

2. Déterminer l'espérance de X. On écrira le résultat sous la forme $a-b\ln(c)$.

Exercice 3

Partie I

Une urne U contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On réalise 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne U. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   (a) Quelle est la loi de X ? On précisera $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout $k\in X(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance de X et de sa variance.
2. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne U successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
   (a) Quelle est la loi de Z ? On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z=k)$ pour tout $k\in Z(\Omega)$.
   (b) Donner les valeurs de $E(Z)$ et de $V(Z)$.

Partie II

L'urne U contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne V contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.
On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans U, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans V.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

3. Que vaut $T(\Omega)$?

4. Déterminer la loi de T. On vérifiera que $P(T = 1) = \frac{7}{16}$.

5. Calculer $E(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?

6. Sachant que l'évènement $[T = 1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?