Devoir maison 8 – Corrigé

Exercice 1

1.
   - $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto x-1$ l'est sur $\mathbb{R}$ (polynomiale). Sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, $x-1 \neq 0$. Par produit et quotient, f est continue sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
   - En 1 : On a $f(1)=0$. Posons $h = x-1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. Pour $x \neq 1$,
   $$f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x-1} = \frac{(\ln(1+x))^2}{h} = \frac{\ln(1+x)}{h} \times \ln(1+h).$$
   Or, par taux d'accroissement usuel, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+x)}{h} = 1$. De plus, par composée, $\lim\limits_{h\to 0} \ln(1+h) = 0$. Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} f(x) = 0 = f(1)$.
   Donc f est continue en 1.
   - Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2.
   - $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.
   - Pour $x > 1$, $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$. Or, par croissance comparée,
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$ et, de par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$. Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

3. (a) $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2(x-1)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par produit et différence, φ est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = -2$.
   Pour $x > 0$, $\varphi(x) = 2x - 2 - x\ln(x) = x(2-\ln(x)) - 2$. Par produit puis différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.
   - Soit $x > 0$.
   $$\varphi'(x) = 2 - \ln(x) - 1 = 1 - \ln(x).$$
   Or, $\varphi'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant \mathrm{e}$ (stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$) et $\varphi'(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = \mathrm{e}$.
   - On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$\varphi'(x)$	||	$+$	0	$-$	
φ	|| -2	$\nearrow$	$\mathrm{e}-2$	$\searrow$	$-\infty$

   (b)
   - $]0,\mathrm{e}[$ est un intervalle.
   - φ est dérivable donc continue sur $]0,\mathrm{e}[$.
   - φ est strictement croissante sur $]0,\mathrm{e}[$ car sur cet intervalle $\varphi'(x) \geqslant 0$ et que $\varphi'(x) = 0$ a un nombre fini de solutions.
   - Notons $J_1 = \left]\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x), \varphi(\mathrm{e})\right[=]-2, \mathrm{e}-2[$. $0 \in J_1$ car $\mathrm{e}-2 > 0$ (car $2 < \mathrm{e} < 3$).

   D'après le théorème de la bijection,
   $\boxed{\text{l'équation } \varphi(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0,\mathrm{e}[.}$
   De même, sur l'intervalle $[\mathrm{e},+\infty[$ où φ est strictement décroissante et $0 \in J_2 = \left]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x), \varphi(\mathrm{e})\right] =]\mathrm{e}-2, -\infty[$.
   $\boxed{\text{L'équation } \varphi(x) = 0 \text{ admet donc une unique solution } \beta \text{ sur } [\mathrm{e},+\infty[.}$
   Enfin, on remarque que $\varphi(1) = 0$ et $1 \in]0,\mathrm{e}[$ donc $\boxed{\alpha = 1.}$

   (c)

x	0		1		β		$+\infty$
$\varphi(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

4. $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto x-1$ l'est sur $\mathbb{R}$ (polynomiale). Sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, $x-1 \neq 0$. Par produit et quotient, f est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$,
$$f'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \times (x-1) - 1 \times (\ln(x))^2}{(x-1)^2} = \frac{\ln(x)(2(x-1) - x\ln(x))}{x(x-1)^2} = \frac{\ln(x)\varphi(x)}{x(x-1)^2}.$$

Or $x(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)\varphi(x)$. On en déduit le tableau suivant :

x	0		1		β		$+\infty$
$\ln(x)$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	0

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X donc la loi est donnée par

$$\begin{cases} X(\Omega) = [\![1,9]\!] \\ \forall k \in [\![1,9]\!], \quad P(X=k) = \dfrac{1}{\ln(10)} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \end{cases}$$

1. • $\forall k \in [\![1,9]\!]$, $\dfrac{1}{\ln(10)} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \geqslant 0$ car $\dfrac{k+1}{k} \geqslant 1$ et $10 > 1$ donc $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \geqslant 0$ et $\ln(10) > 0$.

   • Faisons apparaître un télescopage :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{9} P(X=k) &= \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{9} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \frac{1}{\ln(10)} (\ln(10) - \ln(1)) \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la loi de } X \text{ est bien définie.}}$

2.

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=1}^{9} kP(X=k) \\ &= \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{9} k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{9} \ln\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\prod_{k=1}^{9} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(2 \times \frac{3^2}{2^2} \times \frac{4^3}{3^3} \times \cdots \times \frac{10^9}{9^9}\right) \\ &= \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{10^9}{9!}\right) \\ &= \frac{1}{\ln(10)} (\ln(10^9) - \ln(9!)) \\ &= 9 - \frac{1}{\ln(10)} \ln(9!) \qquad \text{car } \ln(10^9) = 9\ln(10).\end{aligned}$$

Exercice 3

Partie I

1. (a) On considère l'épreuve de Bernoulli : « réaliser un tirage dans l'urne », de succès « obtenir une boule noire », qui a pour probabilité $p = \frac{1}{4}$. On réalise $n = 400$ répétitions identiques et indépendantes de cette épreuve (car les tirages sont réalisés avec remise). X compte le nombre de succès.

   Ainsi, $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } 400 \text{ et } \dfrac{1}{4}.}$

   $\boxed{X(\Omega) = [\![0;400]\!]}$ et $\boxed{P(X=k) = \dbinom{400}{k} \dfrac{1}{4^k} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{400-k} \quad \text{pour tout } k \in X(\Omega)}$

   (b) $\boxed{E(X) = 400 \times \dfrac{1}{4} = 100}$ et $\boxed{V(X) = 100 \times \dfrac{3}{4} = 75.}$

2. (a) Dans cette expérience, en numérotant les boules de 1 à 4 (la noire étant la numéro 1), l'univers est l'ensemble des permutations de $[\![1,4]\!]$. Card$(\Omega) = 4!$.

Cet univers est munit de la probabilité uniforme.
Déterminons alors la loi de Z.
$Z(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.
Pour $k \in [\![1, 4]\!]$, $P(Z = k) = \dfrac{\text{Card}([Z = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3!}{4!} = \dfrac{1}{4}$. En effet, il y a 3! tirages qui donnent la boule 1 en k-ième position (ce qui revient à faire une permutation de $\{2, 3, 4\}$). On en déduit que $\boxed{Z \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1; 4]\!]}$.

(b) $\boxed{E(Z) = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{5}{2}}$ et $\boxed{V(Z) = \dfrac{4^2 - 1}{12} = \dfrac{15}{12} = \dfrac{5}{4}.}$

Partie II

3. $\boxed{T(\Omega) = \{0; 1; 2\}.}$

4. Notons U : « les tirages on lieu dans l'urne U » et N_k : « la boule obtenue au k-ième tirage est noire ».
$[T = 2] = N_1 \cap N_2$. Or, $(U, \bar{U})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,
$$P(T = 2) = P(U)P_U(N_1 \cap N_2) + P(\bar{U})P_{\bar{U}}(N_1 \cap N_2)$$
Or, N_1 et N_2 sont indépendants pour la probabilité P_U (de même que pour $P_{\bar{U}}$) car les tirages dans U (respectivement dans V) sont avec remise, donc indépendants. On a donc $P_U(N_1 \cap N_2) = P_U(N_1)P_U(N_2) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ et $P_{\bar{U}}(N_1 \cap N_2) = P_{\bar{U}}(N_1)P_{\bar{U}}(N_2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$. On obtient
$$P(T = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{32}$$
$[T = 0] = \overline{N_1} \cap \overline{N_2}$. Or, $(U, \bar{U})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales puis indépendance (comme ci-dessus) :
$$\begin{aligned} P(T = 0) &= P(U)P_U(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) + P(\bar{U})P_{\bar{U}}(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) \\ &= P(U)P_U(\overline{N_1})P_U(\overline{N_2}) + P(\bar{U})P_{\bar{U}}(\overline{N_1})P_{\bar{U}}(\overline{N_2}) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{13}{32} \end{aligned}$$

Enfin, $P(T = 1) = 1 - P(T = 0) - P(T = 2) = \dfrac{14}{32} = \dfrac{7}{16}$.

En résumé, la loi de T est donnée par :

t	0	1	2
$P(T = t)$	$\dfrac{13}{32}$	$\dfrac{7}{16}$	$\dfrac{5}{32}$

5. $\boxed{E(T) = 0 \times \dfrac{13}{32} + 1 \times \dfrac{14}{32} + 2 \times \dfrac{5}{32} = \dfrac{24}{32} = \dfrac{3}{4}.}$
Si T suivait une loi binomiale de paramètres n et p, on aurait $n = 2$ (car $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$) et $E(T) = np = 2p$ donc $p = \dfrac{3}{8}$. De plus, on aurait $P(T = 2) = \binom{2}{2}p^2(1-p)^0 = p^2 = \dfrac{9}{64} \neq \dfrac{5}{32}$.
C'est impossible donc $\boxed{T \text{ ne suit pas une loi binomiale.}}$

6. D'après la formule de Bayes,
$$P_{[T=1]}(U) = \frac{P(U)P_U([T = 1])}{P[T = 1]}.$$
Or, $P_U(T = 1) = 1 - P_U(T = 0) - P_U(T = 2)$
et on a vu que $P_U(T = 2) = P_U(N_1 \cap N_2) = \dfrac{1}{16}$
et $P_U(T = 0) = P_U(\overline{N_1})P_U(\overline{N_2}) = \dfrac{9}{16}$. On a donc $P_U(T = 1) = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.

On obtient alors, $\boxed{P_{[T=1]}(U) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}}{\frac{7}{16}} = \dfrac{3}{7}.}$

Par suite, $\boxed{P_{[T=1]}(\bar{U}) = 1 - P_{[T=1]}(U) = \dfrac{4}{7}.}$

En conclusion, sachant que $[T = 1]$ est réalisé, il est plus probable d'avoir obtenu Face, c'est-à-dire d'avoir pioché dans l'urne V.