DEVOIR MAISON 7

À rendre le mardi 31 janvier 2023

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \exp(2x) - \exp(x) - 2\ln(\exp(x) - 1) - 2x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et justifier que f est dérivable sur cet ensemble.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. On considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.
   (a) Trouver une racine de P.
   (b) En déduire une factorisation complète de P dans $\mathbb{R}[x]$.
4. En utilisant la question 3, étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Donner, sans justification supplémentaire, l'ensemble image de f.

Exercice 2

1. Déterminer des réels a, b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x + a)^2 + b = x^2 + 2x + 2$.
2. Déterminer des réels c, d tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = \frac{c}{x^2+1} + \frac{d}{x^2+2x+2}.$$
3. En déduire la valeur de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, x + 2y, 3x + y) \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1, 2, 3)$.
2. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1, 0, -1)$.
3. L'application φ est-elle surjective ?
4. L'application φ est-elle injective ?
5. Démontrer que l'ensemble image de φ est
$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 0\}.$$