Devoir maison 7 - Corrigé

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \exp(2x) - \exp(x) - 2\ln(\exp(x) - 1) - 2x$.

1. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée et combinaison linéaire, f est définie et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^x - 1 > 0\}.$$

Or, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x > 0$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{2x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (\mathrm{e}^x - 1) = 0^+$ (car $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ pour $x > 0$ on l'a vu juste avant). Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Par composée, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\mathrm{e}^x - 1) = -\infty$. Par combinaison linéaire, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$.

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2\ln\left(\mathrm{e}^x\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\right) - 2x \\ &= \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2\ln(\mathrm{e}^x) - 2\ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) - 2x \\ &= \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 4x - 2\ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{2x}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x} - 4\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}\right) - 2\ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = \ln(1) = 0$. Enfin, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x}} = 0$. Par produit et combinaisons linéaires, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

3. (a) $P(-1) = -2 - 3 + 3 + 2 = 0$ donc $\boxed{-1 \text{ est racine de } P.}$

(b) D'après le cours, $(x + 1)$ divise $P(x)$ pour tout réel x. Posons la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 & x + 1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 - 5x + 2 \\ \hline -5x^2 - 3x + 2 & \\ -(-5x^2 - 5x) & \\ \hline 2x + 2 & \\ -(2x + 2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $P(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$. De plus, $\Delta(2x^2 - 5x + 2) = 9 > 0$ donc $x \mapsto 2x^2 - 5x + 2$ a deux racines : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 2$. On a alors $2x^2 - 5x + 2 = 2(x - \frac{1}{2})(x - 2)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 2(x + 1)(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right).}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - 2 \\ &= \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x - 1) - \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1) - 2\,\mathrm{e}^x - 2(\mathrm{e}^x - 1)}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{2\,\mathrm{e}^{3x} - 3\,\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^x - 1} \\ &= \frac{P(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x - 1} \\ &= \frac{2(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 2)\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right)}{\mathrm{e}^x - 1} \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^x > 0$ donc $2(\mathrm{e}^x + 1) > 0$. De plus, $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ donc $\mathrm{e}^x - \frac{1}{2} > \mathrm{e}^x - 1 > 0$. Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 2$.

$$\mathrm{e}^x - 2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 2 \Longleftrightarrow x \geqslant \ln(2)$$

par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\ln(2))$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $f(\ln(2)) = \mathrm{e}^{2\ln(2)} - \mathrm{e}^{\ln(2)} - 2\ln(\mathrm{e}^{\ln(2)} - 1) - 2\ln(2) = 4 - 2 - 2\ln(1) - 2\ln(2) = 2 - 2\ln(2)$.

5. $\boxed{\text{L'ensemble image de } f \text{ est } [2 - 2\ln(2), +\infty[}$.

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x+a)^2 + b = x^2 + 2ax + a^2 + b$. Ainsi, par identification des coefficients

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x+a)^2 + b = x^2 + 2x + 2 \iff \begin{cases} 2a = 2 \\ a^2 + b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\Delta(x^2 + 2x + 2) = -4 < 0$ donc $x^2 + 2x + 2 > 0$ et on a aussi $x^2 + 1 > 0$, les quotients sont bien définis sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{c}{x^2+1} + \frac{d}{x^2+2x+2} = \frac{c(x^2+2x+2) + d(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = \frac{(c+d)x^2 + 2cx + (2c+d)}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$$

Par identification des coefficients, on a donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = \frac{c}{x^2+1} + \frac{d}{x^2+2x+2} \\ \iff \begin{cases} c + d = 0 \\ 2c = 2 \\ 2c + d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ d = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2x+2}}$.

3. En déduire la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{k^2+2k+2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{(k+1)^2+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) && \text{avec } u_k = \frac{1}{k^2+1} \\ &= u_0 - u_{n+1} && \text{par télescopage} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1}}$$

Exercice 3

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(x,y) = (1,2,3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ \boxed{x} + 2y = 2 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -3 \\ \boxed{x} + 2y = 2 \\ -5y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5} \\ x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des antécédents de } (1,2,3) \text{ est } \left\{ \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \right\}}$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(x,y) = (1,0,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ \boxed{x} + 2y = 0 \\ 3x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = 1 \\ \boxed{x} + 2y = 2 \\ -5y = -1 \end{cases}$$

Les lignes 1 et 3 sont incompatibles, il n'y a pas de solution. $\boxed{\text{L'ensemble des antécédents de } (1,0,-1) \text{ est } \varnothing.}$

3. $(1,0,-1) \in \mathbb{R}^3$ n'a pas d'antécédent par φ donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjective.}}$

4. Soient $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $u' = (x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(u) = \varphi(u') \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2x' - y' \\ x + 2y = x' + 2y' \\ 3x + y = 3x' + y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2x' - y' \\ x + 2y = x' + 2y' \\ 5x = 5x' \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = y' \\ x = x' \end{cases} \Leftrightarrow u = u'$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est injective.}}$

5.
   - Soit $v \in \mathrm{Im}(\varphi)$.
     Il existe $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

     $$v = \varphi(u) = \varphi(x,y) = (2x - y, x + 2y, 3x + y)$$

     On a donc $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec

     $$\begin{cases} a = 2x - y \\ b = x + 2y \\ c = 3x + y \end{cases} \quad \text{et} \quad a + b - c = (2x - y) + (x + 2y) - (3x + y) = 0.$$

     Donc $v \in \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 0\}$ et on a l'inclusion

     $$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) \subset \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 0\}.}$$

   - Soit $v \in \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b-c = 0\}$. On a donc $v = (a,b,c)$ avec $a+b-c = 0$. On veut montrer que $v \in \mathrm{Im}(\varphi)$, on cherche donc $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = \varphi(u)$.

     $$\varphi(u) = v \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = a \\ \boxed{x} + 2y = b \\ 3x + y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = a - 2b \\ \boxed{x} + 2y = b \\ -5y = c - 3b \end{cases}$$

     Or, $c = a + b$ donc $c - 3b = a - 2b$. Les lignes 1 et 3 sont identiques. On peut supprimer L_3 et on obtient :

     $$\varphi(u) = v \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ x = b + \frac{2}{5}a - \frac{4}{5}b \end{cases}$$

     Ainsi, $u = \left(\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b, -\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b\right)$ vérifie $\varphi(u) = v$, donc $v \in \mathrm{Im}(\varphi)$. On a montré l'inclusion

     $$\boxed{\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 0\} \subset \mathrm{Im}(\varphi).}$$

   - Conclusion : par double inclusion,

     $$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 0\}.}$$