Devoir maison 6

À rendre le mardi 6 décembre 2022

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. La courbe de f admet-elle des asymptotes ? Si oui, on précisera leur équation.
5. Étudier les variations de f. On attend une réponse précise, formulée en français.
6. Dresser le tableau de variation complet de f.
7. Tracer l'allure de la courbe de f.

Exercice 2

On considère la fonction $g : x \mapsto x + 1 - \ln(x+1)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de g et dresser le tableau de variation complet de g.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e} - 1$.
   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ puis déterminer ℓ.