Devoir maison 4

À rendre le mardi 8 novembre 2022

On soignera la présentation et la rédaction de la copie.
Les conclusions seront encadrées, les calculs seront détaillés.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 4n \end{cases}$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? Justifier.
2. On note $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? Justifier.
3. En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.
4. Exprimer aussi S_n à l'aide de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis en déduire l'expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

1. On se propose de calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big((k+1)^4 - k^4\big)$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Développer $(k+1)^4 - k^4$.
   (c) En déduire que $(n+1)^4 - 1 = 4S_n + 6\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$.
   (d) Calculer alors S_n. On donnera un résultat factorisé.
2. En déduire la valeur de la somme double $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2$.
   Il y a deux façons de calculer cette somme, une plus facile que l'autre.