DEVOIR MAISON 4 – CORRIGÉ

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = 4n$ n'est pas constant, donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas arithmétique.}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = 4n$, expression affine, donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique}}$ de raison 4 et de premier terme $v_0 = 0$.

3. D'après le cours,
$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{v_0 + v_n}{2} \times (n+1) = 2n(n+1)}$$

4. S_n est aussi une somme télescopique :
$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 = u_n + 4n - 1}$$
On en déduit que
$$\boxed{u_n = S_n - 4n + 1 = 2n(n+1) - 4n - 1 = 2n^2 - 2n + 1.}$$

Exercice 2

1. On se propose de calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big((k+1)^4 - k^4\big) = (n+1)^4 - 1^4$, donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big((k+1)^4 - k^4\big) = (n+1)^4 - 1}$.

   (b) D'après la formule du binôme, $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 \times 1 + 6k^2 \times 1^2 + 4k \times 1^3 + 1^4$. Donc $\boxed{(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.}$

   (c) On a donc
$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - 1- &= \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)^4 - k^4\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\big) \\
&= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \qquad \text{par linéarité} \\
&= 4T_n + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n
\end{aligned}$$

(d) Ainsi,
$$\begin{aligned}
4T_n &= (n+1)^4 - 1 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k - n\\
&= (n+1)^4 - 1 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - n\\
&= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\\
&= (n+1)\big((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\big)\\
&= (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1)\\
&= (n+1)(n^3+n^2)\\
&= (n+1)n^2(n+1)\\
&= n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{T_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}.}$ *On retrouve bien sûr la même chose que dans l'ADC 5.*

2.
$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j^2\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}(j^2\times j) \qquad \text{car } j \text{ est une constante dans la somme sur } i\\
&= T_n
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$

Remarque : la deuxième façon de calculer la somme est beaucoup plus laborieuse.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} j^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{i-1} j^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(i-1)(i)(2(i-1)+1)}{6}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2i^3-3i^2+i}{6}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{constante}} - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i \qquad \text{par linéarité}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times n - \frac{1}{3}\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{2n^2(n+1)(2n+1) - n^2(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1) - n(n+1)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)\big(2n(2n+1) - n(n+1) + (2n+1) - 1\big)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)\big(3n^2+3n\big)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)\big(3n(n+1)\big)}{12}\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$