Devoir maison 4 – Corrigé

Exercice 1

- Par linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2+5k-1\right) &= 2\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\\ &= 2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5\times\frac{n(n+1)}{2}-n\\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)+15n(n+1)-6n}{6}\\ &= \frac{n\left(2(n+1)(2n+1)+15(n+1)-6\right)}{6}\end{aligned}$$

  Donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2+5k-1\right)=\frac{n(4n^2+21n+11)}{6}}$$

- $\dfrac{7}{3^k}=7\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$ donc $\left(\dfrac{7}{3^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}\neq 1$. D'après le cours,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{7}{3^k}=7\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{21}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}$$

- $(3k+2)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 3. D'après le cours,

$$\boxed{\sum_{k=3}^{n+1}(3k+2)=\frac{(11+(3(n+1)+2))}{2}\times(n+1-3+1)=\frac{(3n+16)(n-1)}{2}}$$

Exercice 2

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1}-u_n=4n$ n'est pas constant, donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ n'est pas arithmétique.}}$
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $v_n=4n$, expression affine, donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est arithmétique}}$ de raison 4 et de premier terme $v_0=0$.
3. D'après le cours,

$$\boxed{S_n=\sum_{k=0}^{n}v_k=\frac{v_0+v_n}{2}\times(n+1)=2n(n+1)}$$

4. S_n est aussi une somme télescopique :

$$\boxed{S_n=\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_0=u_n+4n-1}$$

   On en déduit que

$$\boxed{u_n=S_n-4n+1=2n(n+1)-4n-1=2n^2-2n+1.}$$

Exercice 3

1.
   - La fonction $g : x\mapsto x^3-x^2-x-2$ est polynomiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - Limites : soit $x\neq 0$.

$$g(x)=x^3\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$$

     donc par produit, $\boxed{\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$.
   - Soit $x\in\mathbb{R}$. $g'(x)=3x^2-2x-1$. Son discriminant est $\Delta=(-2)^2-4\times 3\times(-1==16>0$. Les racines de $g'(x)$ sont $x_1=-\dfrac{1}{3}$ et $x_2=1$.
   - $g(2)=8-4-2-2=0,\quad g(1)=-3$ et $g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{49}{27}$.
     Le tableau de variation de g est

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{49}{27}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$.

   - Initialisation : $u_0 = 3 \geqslant 2$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 2$.
     On a : $u_{n+1} = (u_n)^2(u_n - 1) - 2$. Or $u_n \geqslant 2$ donc $u_n - 1 \geqslant 1$ et $(u_n)^2 \geqslant 4$ (par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$). Par produit (tous les nombres sont positifs) :
     $$(u_n)^2(u_n - 1) \geqslant 1 \times 4 \text{ donc } u_{n+1} \geqslant 4 - 2 = 2.$$
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_n \geqslant 2.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$u_{n+1} - u_n = (u_n)^2(u_n - 1) - 2 - u_n = (u_n)^3 - (u_n)^2 - u_n - 2 = g(u_n).$$
   Or $u_n \geqslant 2$ et g est croissante sur $[2, +\infty[$ d'après 1. Donc $g(u_n) \geqslant g(2) = 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

4. - Supposons, par l'absurde, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$.
     Puisque (u_n) est croissante, on a $u_n \geqslant u_0 = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite dans cette inégalité, $\ell \geqslant 3$.
     De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ((u_n)^2(u_n - 1) - 2) = \ell^2(\ell - 1) - 2$. Puisque, $u_{n+1} = (u_n)^2(u_n - 1) - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par passage à la limite,
     $$\ell = \ell^2(\ell - 1) - 2 \text{ donc, en développant, } \ell^3 - \ell^2 - \ell - 2 = 0 \text{ soit } g(\ell) = 0.$$
     Or, $g(\ell) \geqslant g(3) = 13$ par croissance de g sur $[1, +\infty[$.
     On obtient une contradiction. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converge : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$.
   - Déterminons la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on a forcément : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_{n+1} - S_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.

   Donc $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ est croissante.}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= (S_{n+1} - S_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (T_n) \text{ est décroissante.}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$T_n - S_n = \frac{1}{n \times n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Avec les questions 1 et 2, ceci permet de dire que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes,
   $$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent et ont la même limite.}}$$