DEVOIR MAISON 3 – CORRIGÉ

Exercice 1

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x & +3y & -z & +2t = & 3 \\ 2x & +2y & & +6t = & 2 \\ -2x & +3y & +z & +4t = & 3 \\ 8x & -y & -3z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrll} & 6y & & +6t & = 6 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ 2x & +2y & & +6t & = 2 & \\ -2x & +3y & +\boxed{z} & +4t & = 3 & \\ 2x & +8y & & +12t & = 8 & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrll} & y & & +t & = 1 & L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ x & +y & & +3t & = 1 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ -2x & +3y & +\boxed{z} & +4t & = 3 & \\ x & +4y & & +6t & = 4 & L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrll} & y & & +t & = 1 & \\ \boxed{x} & +y & & +3t & = 1 & \\ & 5y & +\boxed{z} & +10t & = 5 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ & 3y & & +3t & = 3 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrll} & y & & +t & = 1 & \\ \boxed{x} & +y & & +3t & = 1 & \\ & 5y & +\boxed{z} & +10t & = 5 & \\ & y & & +t & = 1 & L_4 \leftarrow \frac{1}{3}L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrll} & \boxed{y} & & +t & = 1 & \\ \boxed{x} & & & +2t & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ & & \boxed{z} & +5t & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \boxed{y} = 1 - t \\ \boxed{x} = -2t \\ \boxed{z} = -5t \end{array}\right.$$

$$\iff (x,y,z,t) = (-2t, 1-t, -5t, t)$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{(-2t, 1-t, -5t, t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}\}.}$

Autres réponses possibles :

- $(x, 1 + \frac{1}{2}x, \frac{5}{2}x, -\frac{1}{2}x)$
- $(-2 + 2y, y, -5 + 5y, 1 - y)$
- $(\frac{2}{5}z, 1 + \frac{1}{5}z, z, -\frac{1}{5}z)$

Exercice 2

1. $x \mapsto 1 + x$ est affine donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}+^*$. Par composée, $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x > 0\} =]-1, +\infty[.$$

De plus, $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est rationnelle donc définie et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x \neq 0\} = \{\backslash\{-1\}.$$

Par somme, $\boxed{g \text{ est définie et dérivable sur }]-1, +\infty[.}$

2. Soit $x > -1$. $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{2+x}{(1+x)^2}$.
Or $x > -1$ donc $(1+x)^2 > 0$ et $x + 2 > 1 > 0$. Ainsi, $g'(x) > 0$. $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est strictement croissante sur }]-1, +\infty[.}$

De plus, $g(0) = \ln(1) + 0 = 0$. Donc on a

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3. On a une puissance variable : $\boxed{f(x) = \exp(x \ln(1+x))}$.
On a déjà vu que $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$. De plus, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Par produit puis composée, $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur }]-1, +\infty[.}$

4. Soit $x > -1$. Notons $u(x) = x\ln(1+x)$. $u'(x) = \ln(1+x) + x \times \dfrac{1}{1+x} = g(x)$ donc $f'(x) = g(x)\exp(x\ln(1+x))$.

Puisque $\exp(x\ln(1+x)) > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

5. $f'(1) = 2\ln(2) + 1$ et $f(1) = 2$ donc
$f'(1)(x-1) + f(1) = (2\ln(2)+1)x - 2\ln(2) + 1$.
L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est $\boxed{y = (2\ln(2)+1)x - 2\ln(2) + 1}$.

6. (a) On a une forme explicite. f est croissante sur $[0, +\infty[$ donc d'après le cours, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

   (b) $u_n = \exp(n\ln(1+n))$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$
   donc par composée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+n) = +\infty$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+n) = +\infty$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc par composée, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

7. (a) Démontrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, v_n existe et $v_n \geqslant 1$.
   Initialisation : $v_0 = 1$ donc v_0 existe et $v_0 \geqslant 1$.
   Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel que v_n existe et $v_n \geqslant 1$.
   Puisque $v_n \in]-1,+\infty[$, $v_{n+1} = f(v_n)$ existe.
   De plus, d'après l'étude de f (question 4), $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.
   En particulier, $v_{n+1} = f(v_n) \geqslant 1$.
   Conclusion :
   $\boxed{\text{d'après le principe de récurrence, pour tout } n\in\mathbb{N},\ v_n \text{ existe et } v_n \geqslant 1.}$

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$.
   $v_{n+1} = \exp(v_n\ln(1+v_n))$.
   Or, $v_n \geqslant 1$ et $1 + v_n \geqslant v_n > 0$ donc par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+v_n) \geqslant \ln(v_n)$. Par produit d'inégalités de nombres positifs,
   $$v_n\ln(1+v_n) \geqslant 1 \times \ln(v_n) = \ln(v_n).$$
   Or, la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$ donc
   $$\exp(v_n\ln(1+v_n)) \geqslant \exp(\ln(v_n))$$
   c'est-à-dire $\boxed{v_{n+1} \geqslant v_n.}$ Ainsi, $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n}.$$

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n - 1 > 0$.
Initialisation : la relation est vraie au rang 0 car $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$;
Hérédité : soit n un entier naturel tel que $u_n - 1 > 0$.
$u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n} - 1 = \dfrac{1+2u_n-2-u_n}{2+u_n} = \dfrac{u_n-1}{2+u_n}$.
Or, $u_n - 1 > 0$ et comme $u_n > 1$, $3 + u_n > 4 > 0$. Par quotient, $u_{n+1} - 1 > 0$.
Conclusion : par récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\quad u_n - 1 > 0.}$

2. Quel que soit l'entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+2u_n}{2+u_n} - u_n = \frac{1+2u_n-2u_n-u_n^2}{2+u_n} = \frac{1-u_n^2}{2+u_n} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2+u_n}.$$
On sait que pour tout n, $\ 1 - u_n < 0$, $u_n + 1 > 0$ et $2 + u_n > 0$. Par produit et quotient, $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

3. (a) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 (d'après la question 1, $u_n > 1$) donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge}}$ vers un réel ℓ.

   (b) • Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $u_n > 1$ donc par passage à la limite dans une inégalité, $\boxed{\ell \geqslant 1}$.

   • Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ d'après le cours et par opérations $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2u_n}{2+u_n} = \dfrac{1+2\ell}{2+\ell}$. Donc $\boxed{\ell = \dfrac{1+2\ell}{2+\ell}}$.

   (c) On a $\ell = \dfrac{1+2\ell}{2+\ell}$ donc $\ell(2+\ell) = 1 + 2\ell$ et donc $\ell^2 = 1$. Ceci donne $\ell = -1$ ou $\ell = 1$. Or, on sait aussi que $\ell \geqslant 1$. Donc $\boxed{\ell = 1}$.