Devoir maison 1

À rendre le vendredi 3 septembre 2021

Comment organiser vos révisions ?

Avant de vous lancer dans ce devoir, il convient de reprendre quelques points de cours. Je vous demande de travailler les points suivants du programme du lycée :

- Calcul (parenthèsage, fractions, développement, factorisation). Équations et inéquations (produits, quotient, second degré).
- Suites : définition explicite (terme général) ou par une relation de récurrence, suites arithmétiques et géométriques, monotonie, limite (notamment de q^n).
- Étude de fonctions :
  - Fonctions usuelles : carré, cube, puissance n, inverse, racine carrée, exp et ln.
  - Dérivation et étude des variations.
  - Calcul de limites.
- Probabilités : calcul de probabilités, probabilités conditionnelles, arbres pondérés, variables aléatoires, loi binomiale.

Ce programme se base sur des notions vues en seconde, en première spécialité mathématiques et, pour la terminale, sur des notions communes à la spécialité mathématiques et à l'option mathématiques complémentaires.
Cette liste est volontairement restreinte et contient les points essentiels au bon démarrage de l'année.
Reprennez donc vos cours et refaites quelques exercices. Pour ceux qui n'auraient plus leurs anciens cours, le site `https://manuel.sesamath.net/` propose des manuels à télécharger.

Ce devoir constitue ensuite un bilan de vos révisions. Il est à faire à la fin de l'été sur une copie qui sera à rendre au premier cours.

Le premier devoir surveillé (vendredi 10 septembre 2021) portera sur ce même programme.

NB : la calculatrice n'est pas autorisée aux concours. Il va falloir réapprendre à faire les calculs à la main. Je vous conseille de vous y mettre tout de suite. La calculatrice sera autorisée (sans être nécessaire) pour le premier devoir surveillé de l'année.

On soignera la présentation et la rédaction de la copie.
Les conclusions seront encadrées, les calculs seront détaillés.

Exercice 1

Entraînement au calcul sans calculatrice. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer $\dfrac{\frac{3}{2}}{4} - \dfrac{2}{15} \times 10$.
2. Simplifier $\dfrac{(x^2y)^3}{x^{-1}y^4}$.
3. Résoudre l'équation $2x^2 = 5x + 3$.
4. Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{2x-1} \leqslant \dfrac{4}{x^2-4}$.
5. Résoudre l'équation $\ln(2) + \ln(x) = 1$.
6. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x}$.

Exercice 2

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2020.
À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 20$.
   (b) Calculer u_1 et u_2 (*c'est le moment de s'entraîner au calcul sans calculatrice !*) et expliquer ce que ces nombres représentent.
2. Soit $v_n = u_n - 80$.
   (a) Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{3}{4}v_n$.
   (b) De quel type est la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.
3. Quel calcul faut-il faire pour obtenir le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er janvier 2022 ?
4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$.
3. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
5. Dresser le tableau de variation complet de f.

Exercice 4

Soit x un réel de l'intervalle $[0, 80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne. On note

- B l'événement « le cube tiré est bleu »,
- R l'événement « le cube tiré est rouge »,
- C l'événement « le cube tiré est marqué d'un cercle »,
- L l'événement « le cube tiré est marqué d'un losange »,
- E l'événement « le cube tiré est marqué d'une étoile ».

1. Faire un arbre probabiliste représentant les issues de l'expérience, avec les probabilités déduites immédiatement de l'énoncé.
2. Démontrer que $P(L) = \dfrac{3}{25} + \dfrac{x}{250}$.
3. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.