Devoir maison 1 – Corrigé

Exercice 1

Le corrigé présente ici une façon de réaliser ces calculs. Il y a en général plusieurs raisonnements possibles.

1. $\dfrac{\frac{3}{2}}{4} - \dfrac{2}{15} \times 10 = \dfrac{3}{2 \times 4} - \dfrac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 5} = \dfrac{3}{8} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{9}{24} - \dfrac{32}{24} = -\dfrac{23}{24}.$

$$\boxed{\dfrac{\frac{3}{2}}{4} - \dfrac{2}{15} \times 10 = -\dfrac{23}{24}.}$$

2. $\dfrac{(x^2y)^3}{x^{-1}y^4} = \dfrac{(x^2)^3y^3}{x^{-1}y^4} = \dfrac{x^6}{x^{-1}} \times \dfrac{y^3}{y^4} = x^{6+1} \times \dfrac{1}{y^{4-3}} = \dfrac{x^7}{y}.$

$$\boxed{\dfrac{(x^2y)^3}{x^{-1}y^4} = \dfrac{x^7}{y}.}$$

3. Soit x un réel.

$$2x^2 = 5x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

C'est une équation du second degré.
Le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$.
Il y a donc deux solutions réelles :

$$\boxed{x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{49}}{4} = -\dfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{49}}{4} = 3.}$$

4. Soit x un réel. Il y a deux quotients, commençons par chercher les valeurs interdites :

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

Les <u>valeurs interdites</u> sont : -2, $\dfrac{1}{2}$ et 2.

Soit donc x un réel de $\mathbb{R} \setminus \{-2,\ \frac{1}{2},\ 2\}$.

$$\begin{aligned}
\dfrac{1}{2x-1} \leqslant \dfrac{4}{x^2-4} &\Longleftrightarrow \dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{4}{x^2-4} \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \dfrac{x^2-4}{(2x-1)(x^2-4)} - \dfrac{4(2x-1)}{(2x-1)(x^2-4)} \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \dfrac{x^2-8x}{(2x-1)(x^2-4)} \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \dfrac{x(x-8)}{(2x-1)(x^2-4)} \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Faisons un tableau de signe du quotient pour résoudre cette inéquation.

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{2}$		2		8		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x - 8$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x(x-8)}{(2x-1)(x^2-4)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc }]-\infty, -2[\cup[0, \tfrac{1}{2}[\cup]2, 8].}$$

5. La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ donc on considère un réel $x \in]0, +\infty[$.

$$\ln(2) + \ln(x) = 1 \Longleftrightarrow \ln(2x) = 1 \Longleftrightarrow \ln(2x) = \ln(\mathrm{e}) \Longleftrightarrow 2x = \mathrm{e} \Longleftrightarrow x = \dfrac{\mathrm{e}}{2}.$$

Autre rédaction :

$$\ln(2)+\ln(x) = 1 \Longleftrightarrow \ln(2x) = 1 \Longleftrightarrow \exp(\ln(2x)) = \exp(1) \Longleftrightarrow 2x = \mathrm{e} \Longleftrightarrow x = \dfrac{\mathrm{e}}{2}.$$

$$\boxed{\text{L'équation } \ln(2) + \ln(x) = 1 \text{ a une seule solution : } x = \dfrac{\mathrm{e}}{2}.}$$

6. Soit $x > 0$.

   Rédaction 1 : on montre que la différence est nulle.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} &= \frac{x}{x(\sqrt{x+1}-1)} - \frac{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}{x(\sqrt{x+1}-1)}\\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+1}-1)} - \frac{(\sqrt{x+1})^2-1^2}{x(\sqrt{x+1}-1)}\\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+1}-1)} - \frac{x}{x(\sqrt{x+1}-1)}\\ &= 0\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x}.}$

   Rédaction 2 : utilisation de la quantité conjuguée.
   L'idée ici est de se « débarrasser » de la racine carrée en faisant apparaître l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$. On dit que $a+b$ est la quantité conjuguée de $a-b$ (et vice versa).
   Ici, au dénominteur, $a = \sqrt{x+1}$ et $b = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} &= \frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}\\ &= \frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1})^2-1^2}\\ &= \frac{\sqrt{x+1}+1}{x}\end{aligned}$$

Exercice 2

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. À la fin du n-ième mois, Maya possède la somme u_n. Elle en dépense un quart soit $\frac{1}{4}u_n$ puis place 20 euros. Elle a donc, à la fin du mois suivant :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4}u_n + 20 = \frac{3}{4}u_n + 20}$$

   (b) $\boxed{u_1 = 35}$: Maya a 35€dans sa tirelire le 1er juillet 2020.
   $\boxed{u_2 = \dfrac{184}{4} = 46,25}$: Maya a 46,25€dans sa tirelire le 1er août 2020.

2. (a) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 80 = \frac{3}{4}u_n - 60 = \frac{3}{4}(v_n + 80) - 60 = \frac{3}{4}v_n + 60 - 60.$$

   Donc $\boxed{v_{n+1} = \dfrac{3}{4}v_n.}$

   (b) On reconnaît une $\boxed{\text{suite géométrique de raison } \dfrac{3}{4}}$ et de premier terme $\boxed{v_0 = u_0 - 80 = -60.}$

   (c) D'après le cours sur les suites géométriques,

$$\boxed{v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = -60\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

   puis

$$\boxed{u_n = 80 + v_n = 80 - 60\left(\frac{3}{4}\right)^n.}$$

3. Au 1er janvier 2022, il s'est écoulé 19 mois. Le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er janvier 2022 est donné par $\boxed{u_{19} = 80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{19} \approx 79,75€}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \left(80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) - \left(80 - 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\\ &= -60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 60 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\\ &= 60\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(-\frac{3}{4}+1\right)\\ &= 15\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 80}$. Après un grand nombre de mois, les économies de Maya seront proches de 80 euros.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1. $f(0) = \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{1+1}$ donc $\boxed{f(0) = \dfrac{1}{2}.}$

2. Soit x un réel. $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{1}{e^x} \times \dfrac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \dfrac{1}{e^x} \times \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x} \times f(x)$

   donc $\boxed{f(-x) = \dfrac{f(x)}{e^x}.}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

   Par ailleurs,
   $$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}.$$
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ et ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

4. Soit x un réel.

   $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Ainsi, $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}.}$

5. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $f'(x) > 0$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

   Son tableau de variation est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	1

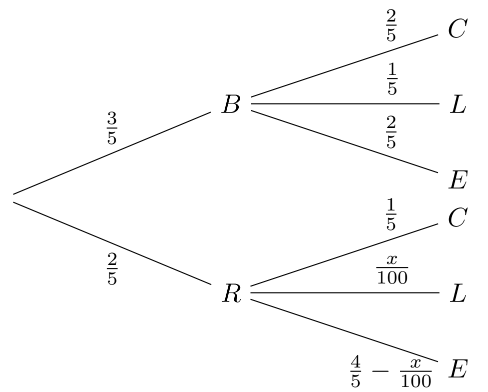
Exercice 4

1. L'énoncé donne $P(B) = \dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{5}$ puis $P(R) = 1 - P(B) = \dfrac{2}{5}$.

   On a aussi $P_B(C) = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$, $P_B(L) = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$

   puis $P_B(E) = 1 - P_B(C) - P_B(L) = \dfrac{2}{5}$. Enfin, $P_R(C) = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$, $P_R(L) = \dfrac{x}{100}$

   donc $P_R(E) = 1 - P_R(C) - P_R(L) = \dfrac{4}{5} - \dfrac{x}{100}$.



2. D'après la formule des probabilités totales, B et R formant une partition de l'univers,
   $$P(L) = P(B) \times P_B(L) + P(R) \times P_R(L) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{x}{100} = \frac{3}{25} + \frac{x}{250}.$$
   Ainsi, on a bien : $\boxed{P(L) = \dfrac{3}{25} + \dfrac{x}{250}}$

3. On cherche à savoir pour quels x on a : $P(E) = P(L)$. Or
   $$P(E) = P(B) \times P_B(E) + P(R) \times P_R(E) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{4}{5} - \frac{x}{100}\right) = \frac{14}{25} - \frac{x}{250}.$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} P(E) = P(L) &\iff \frac{14}{25} - \frac{x}{250} = \frac{3}{25} + \frac{x}{250} \\ &\iff 140 - x = 30 + x \qquad \text{(on a fait } \times 250) \\ &\iff x = 55. \end{aligned}$$

La probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile si et seulement si $x = 55$.

4. On cherche $P_L(B)$.
   $$P_L(B) = \frac{P(B \cap L)}{P(L)} = \frac{P(B) \times P_B(L)}{P(L)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{5}}{\frac{3}{25} + \frac{50}{250}} = \frac{3}{8}.$$

La probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est égale à $\dfrac{3}{8}$.