Calcul - Corrigé

* si vous pensez avoir vu une erreur, prévenez-moi : cecile.lerudulier@gmail.com

Exercice 1

① a) $(x+2)(-2x-3) = -2x^2 - 3x - 4x - 6$
$= -2x^2 - 7x - 6$

Rq : $(x+2)(-2x-3) = (x+2) \times (-(2x+3))$
$= -(x+2)(2x+3)$
$= -(2x^2 + 3x + 4x + 6)$
$= -(2x^2 + 7x + 6)$
$= -2x^2 - 7x - 6$

b) $(3x-1)^2 = (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 1 + 1^2$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$= 9x^2 - 6x + 1$

c) $(t+2)(t-2) = t^2 - 2^2 = t^2 - 4$ $\quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

d) $(a+b)^3 = (a+b)^2 \times (a+b)$
$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$
$= a^3 + \underline{a^2b} + \underline{2a^2b} + \underline{2ab^2} + \underline{b^2a} + b^3$
$= a^3 + \underline{3a^2b} + \underline{3ab^2} + b^3$

② a) $3x - 5x^2 = 3x - 5x \times x$ $\quad$ facteur commun
$= x(3 - 5x)$

b) $x - 1 + 2x(x-1) = (x-1) \times 1 + 2x(x-1)$
$= (x-1)(1+2x)$

c) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$ $\quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$= (2x-3)(2x+3)$

d) $(6-2t)^2 - (t-1)(3-t) = (2(3-t))^2 - (t-1)(3-t)$

$= 4(3-t)^2 - (t-1)(3-t)$

$= (3-t)\left(4(3-t) - (t-1)\right)$

$= (3-t)(12 - 4t - t + 1)$

$= (3-t)(13-5t)$

e) $79 \times 822 - 79 \times 812 = 79 \times (822 - 812)$

$= 79 \times 10$

$= 790$

3 a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{12} + \frac{10}{12} = \frac{13}{12}$

c) $\frac{3}{4} \times \frac{4}{9} \times 2 = \frac{3 \times 4 \times 2}{4 \times 9}$

On simplifie avant toute multiplication

$= \frac{\cancel{3} \times \cancel{4} \times 2}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times 3}$

$= \frac{2}{3}$

d) $\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

$\frac{2}{\frac{3}{5}} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

e) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} - \frac{2}{25} \times 10 = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} - \frac{2 \times 10}{25}$

On simplifie d'abord

$= \frac{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{3}} - \frac{2 \times 2 \times \cancel{5}}{5 \times \cancel{5}}$

$= 2 - \frac{4}{5}$

$= \frac{10}{5} - \frac{4}{5}$

$= \frac{6}{5}$

f) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{1-2x}{4} = \dfrac{2(x-3)}{4} - \dfrac{1-2x}{4}$

$= \dfrac{(2x-6)-(1-2x)}{4}$

$= \dfrac{2x-6-1+2x}{4}$

$= \dfrac{4x-7}{4}$

g) $\dfrac{x-3}{1+x} - \dfrac{1-2x}{(1+x)^2} = \dfrac{(x-3)(1+x)}{(1+x)^2} - \dfrac{1-2x}{(1+x)^2}$

Ne jamais développer le dénominateur (en bas)

$= \dfrac{(x+x^2-3-3x)-(1-2x)}{(1+x)^2}$

$= \dfrac{x^2-2x-3-1+2x}{(1+x)^2}$

$= \dfrac{x^2-4}{(1+x)^2}$

h) $\dfrac{x-3}{1+x} - \dfrac{1-2x}{5-x} = \dfrac{(x-3)(5-x)-(1-2x)(1+x)}{(1+x)(5-x)}$

$= \dfrac{(5x-x^2-15+3x)-(1+x-2x-2x^2)}{(1+x)(5-x)}$

$= \dfrac{x^2+8x-16}{(1+x)(5-x)}$

4 a) $2^{4^2} = 2^{16} = 65\,536$

$(2^4)^2 = 2^8 = 256$

b) $(2x)^3 \times (4x^3)^2 = 2^3 x\, x^3 \times 4^2 \times (x^3)^2$

$= 2^3 \times x^3 \times (2^2)^2 \times x^6$

$= 2^7 \times x^9$

c) $(x^2-3x)^2 = (x^2)^2 - 2 \times x^2 \times (3x) - (3x)^2$

$= x^4 - 6x^3 - 9x^2$

d) $\dfrac{2^{x+3}}{8 \times 2^{2x}} = \dfrac{2^3 \times 2^x}{8 \times 2^{2x}} = \dfrac{8}{8 \times 2^{2x-x}} = \dfrac{1}{2^x}$

ou $= 2^{-x}$

e) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^4 + \dfrac{3y}{x^2} = \dfrac{1^4}{x^4} + \dfrac{3y}{x^2}$

$= \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{3y\,x^2}{x^4}$

$= \dfrac{1+3yx^2}{x^4}$

f) $\dfrac{(x^2y)^3}{x^{-1}\,y^4} = \dfrac{x^6\,y^3}{x^{-1}\,y^4} = \dfrac{x^7}{y}$ ou $x^7\,y^{-1}$

⚠ Ne pas oublier les parenthèses :

$(3x)^2 \neq 3x^2$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)^4 \neq \dfrac{1}{x}^4$

5 a) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$

b) • $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

ou • $(4\sqrt{2})^2 = 4^2 \times (\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$ donc $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

c) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

Exercice 2

1) $2x + 5 = 3x - 4 \iff 2x - 3x = -4 - 5$

$\iff -x = -9$

$\iff x = 9$

2) $x = 2 - x \iff x + x = 2 \iff 2x = 2 \iff x = 1$

3) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5 \iff \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right) \times 4 = 5 \times 4$ ×4 pour enlever les fractions

$\iff 3x + 2 = 20$

$\iff 3x = 20 - 2$

$\iff x = \frac{18}{3}$

$\iff x = 6$

4) $4 - x \leq 2 + x \iff -x - x \leq 2 - 4$

$\iff -2x \leq -2$

$\iff x \geq \frac{-2}{-2}$ car $-2 < 0$

$\iff x \geq 1$

L'ensemble des solutions est $[1, +\infty[$

5) $6x + 1 > 1 - 7x \iff 6x + 7x > 1 - 1$

$\iff 13x > 0$

$\iff x > \frac{0}{13}$ car $13 > 0$

$\iff x > 0$

L'ensemble des solutions est $]0, +\infty[$.

6) $3 - 2x < 7 - 4x \iff -2x + 4x < 7 - 3$

$\iff 2x < 4$

$\iff x < \frac{4}{2}$ car $2 > 0$

$\iff x < 2$

L'ensemble des solutions est $]-\infty, 2[$

Exercice 3

1) $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$.

Les solutions sont :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

et $$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

2) $x^2 - 5x + 2 = 0$.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 25 - 8 = 17 > 0$

Les solutions sont

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$

3) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$

Il y a une seule solution :

$$x_0 = \frac{-6}{2} = -3.$$

Remarque : on peut aussi voir l'identité remarquable.

$x^2 + 6x + 9 = 0 \iff x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = 0$

$\iff (x+3)^2 = 0$

$\iff x + 3 = 0$

$\iff x = -3$

4) $2x+1=3x^2 \iff -3x^2+2x+1=0.$

$\Delta = 2^2-4\times(-3)\times 1 = 4+12 = 16 > 0$

Les solutions sont :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-3)} = \frac{-2-4}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

et $$x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-3)} = \frac{-2+4}{-6} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Inéquation

5) $3x-x^2-2>0 \iff -x^2+3x-2>0$

• On résout d'abord $-x^2+3x-2=0$.

$\Delta = 9+8 = 17 > 0$.

L'équation $-x^2+3x-2=0$ a pour solutions

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{-2} = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

et $$x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{-2} = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

• Tableau de signe du trinôme $-x^2+3x-2$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ici $x_2 < x_1$

le coef. dominant est <0, parabole $\cap$: $-\ +\ -$

• Conclusion (ici, on veut >0) : L'ensemble des solutions de $3x-x^2-2>0$ est $\left]\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right[$

6) $x^2+x \geq 12 \iff x^2+x-12 \geq 0.$

* Résolution de $x^2+x-12=0$.

$\Delta = 1^2-4\times1\times(-12) = 1+48 = 49$

$x^2+x-12=0$ a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{49}}{2} = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

et $$x_2 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2} = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

* Tableau de signe

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
x^2+x-12		$+$	0	$-$	0	$+$	

coef dominant >0.
Parabole $\cup$

* Conclusion : l'ensemble des solutions de $x^2+x \geqslant 12$
est $]-\infty, -4] \cup [3, +\infty[$

7) $x^2 - 4x + 4 > 0$

* $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$
l'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$ a une solution :
$$x_0 = \frac{4}{2} = 2$$

* Tableau de signe

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-4x+4		$+$	0	$+$	

* Conclusion : l'ensemble des solutions de
$x^2 - 4x + 4 > 0$ est $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[= \mathbb{R}\setminus\{2\}$

8) $x^2 + x + 1 \geqslant 0$.

* $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = -3 < 0$.
l'équation : $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution

⚠ équation $\neq$ inéquation

* Tableau de signe

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2+x+1		$+$	

* Conclusion : l'ensemble des solutions de $x^2+x+1 \geqslant 0$
est $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Exercice 4

Vous devez savoir dresser le tableau de signe de $ax+b$ (1^{er} degré) et ax^2+bx+c (2^{nd} degré).
Pour le reste, on <u>factorise</u>.

1) $5x-6$. (1^{er} degré)

* $5x-6=0 \iff 5x=6 \iff x=\frac{6}{5}$.
*

x	$-\infty$		$6/5$		$+\infty$
$5x-6$		$-$	0	$+$	

↳ coef dominant $5>0$ → pente → $-\ +$

2) $3-x$

* $3-x=0 \iff x=3$
*

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

↳ coef dominant $-1<0$ → pente → $+\ -$

3) $1-x^2$ (2^{nd} degré)

* $1-x^2=0 \iff x^2=1 \iff x=\sqrt{1}$ ou $x=-\sqrt{1}$
$\iff x=1$ ou $x=-1$

*

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

↳ coef dominant $-1<0$ → parabole $\cap$ → $-\ +\ -$

4) $(2x-5)(x+3)(1-5x)$

C'est un produit, donc réalise un tableau et on utilise la règle sur le signe d'un produit

* $2x-5=0 \iff x=\frac{5}{2}$
$x+3=0 \iff x=-3$
$1-5x=0 \iff x=\frac{1}{5}$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{5}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-5x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-5)(x+3)(1-5x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

← produit

5) $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 4x}{}$

Ce n'est pas du 1^{er} ou du 2^{nd} degré

↳ On factorise.

* $x^3 - 5x^2 + 4x = x(x^2 - 5x + 4)$
* On résout $x^2 - 5x + 4 = 0$

↳ $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$.

$x^2 - 5x + 4 = 0$ a deux solutions : $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{9}}{2} = \dfrac{5-3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

et $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{9}}{2} = \dfrac{5+3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+4		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^3-5x^2+4x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

← produit

6) $\dfrac{3-2x}{6x-3}$

* $3 - 2x = 0 \iff x = \dfrac{3}{2}$

$6x - 3 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$ (valeur interdite)

* Même règle pour les quotients que pour les produits.
  On n'oublie pas d'indiquer les valeurs interdites.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$6x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3-2x}{6x-3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

7) . $\dfrac{e^x - x e^x}{1 - 4x^2}$

<u>Quotient</u> : dénominateur $= 1 - 4x^2 \to 2^{nd}$ degré $\to$ on sait faire

numérateur $= e^x - x e^x \to$ à <u>factoriser</u>

. $e^x - x e^x = e^x(1-x)$ produit et on sait écrire le signe de tous les facteurs

. $1 - 4x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{4}$

on peut aussi passer par Δ

$\iff x = \sqrt{\frac{1}{4}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{1}{4}}$

$\iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-4x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{e^x - xe^x}{1-4x^2}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$e^x > 0$ pour tout x

Exercice 5

1) $$\frac{2x-1}{x+3} = \frac{1}{x+2}$$

* Valeurs interdites

- $x+3=0 \iff x=-3$
- $x+2=0 \iff x=-2$

Il y a deux valeurs interdites : -3 et -2.

* Résolution

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.

Méthode 1

$$\frac{2x-1}{x+3} = \frac{1}{x+2} \iff (2x-1)(x+2) = 1\times(x+3)$$
$$\iff 2x^2 + 4x - x - 2 = x+3$$
$$\iff 2x^2 + 2x - 5 = 0$$

$\Delta = 2^2 - 4\times 2\times(-5) = 4 + 40 = 44$

On a $\sqrt{44} = \sqrt{4\times 11} = \sqrt{4}\times\sqrt{11} = 2\sqrt{11}$

Les solutions sont

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{44}}{4} = \frac{-2-2\sqrt{11}}{4} = \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{44}}{4} = \frac{-2+2\sqrt{11}}{4} = \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$$

(qui ne sont pas des valeurs interdites)

Méthode 2 :

$$\frac{2x-1}{x+3} = \frac{1}{x+2} \iff \frac{2x-1}{x+3} - \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\iff \frac{(2x-1)(x+2) - (x+3)}{(x+3)(x+2)} = 0$$

$$\iff \frac{2x^2+2x-5}{(x+3)(x+2)} = 0$$

$$\iff 2x^2+2x-5 = 0.$$

Et on termine de la même façon.

2) $2x + 1 = \dfrac{1}{2x-3}$

- Valeurs interdites : $2x - 3 = 0 \iff 2x = 3$

$\iff x = \dfrac{3}{2}$

- Soit $x \neq \dfrac{3}{2}$.

$$2x+1 = \frac{1}{2x-3} \iff (2x+1)(2x-3) = 1$$
$$\iff 4x^2 - 6x + 2x - 3 = 1$$
$$\iff 4x^2 - 4x - 4 = 0$$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 4^2 + 4^3 = 4^2(1+4)$

$= 4^2 \times 5$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

Les solutions sont : $x_1 = \dfrac{4 - 4\sqrt{5}}{4 \times 2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Remarque : on peut aussi simplifier avant de poursuivre :

$$4x^2 - 4x - 4 = 0 \iff (4x^2 - 4x - 4) \times \frac{1}{4} = 0 \times \frac{1}{4}$$

$$\iff x^2 - x - 1 = 0$$

↳ calculs plus simples (Δ, x_1 et x_2)

3) $\dfrac{4-x}{x-1} \leq \dfrac{2}{x+1}$

* <u>Valeurs interdites</u> : $x-1=0 \iff x=1$

$x+1=0 \iff x=-1$

* Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Produit en croix <u>interdit</u> dans une inégalité

$$\frac{4-x}{x-1} \leq \frac{2}{x+1} \iff \frac{6-x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leq 0$$

$$\iff \frac{(4-x)(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$$\iff \frac{4x+6-x^2-x-2x+2}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$$\iff \frac{-x^2+x+6}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

* <u>Tableau de signe</u>

→ Pour $-x^2+x+6$: $\Delta = 1 + 24 = 25$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1-5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \\ x_2 &= \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \end{aligned}\right\} \text{ solutions de } -x^2+x+6=0$$

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
$-x^2+x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-x^2+x+6}{(x-1)(x+1)}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est $]-\infty, -2] \cup]-1, 1[\cup [3, +\infty[$

Exercice 6

1) $\exp(3) \times \exp(-7) = e^3 \times e^{-7} = e^{3-7} = e^{-4}$

2) $\dfrac{\exp(2x)}{\exp(4x)} = \dfrac{e^{2x}}{e^{4x}} = e^{2x-4x} = e^{-2x}$

3) $\exp(x) - \exp(x+1) = e^{x} - e^{x+1}$

$= e^{x} - e^{x} \times e^{1}$

$= e^{x}(1 - e)$ $\qquad e^1 = e$

4) $\underline{\ln(2) + \ln(x) = 1}$

$\underline{\text{Soit } x > 0}$

$\ln(2) + \ln(x) = 1 \iff \ln(2x) = 1$

$\iff \exp(\ln(2x)) = \exp(1)$

$\iff 2x = e$

$\iff x = \dfrac{e}{2}$

Exercice 7

1) $f(x) = x^2 + 3x - 5$

$f'(x) = 2x + 3$

2) $f(x) = 2x^3 - 7x^4$

$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 7 \times 4x^3$

$= 6x^2 - 28x^3$

3) $f(x) = xe^{x}$ Produit

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x$ $\qquad v(x) = e^{x}$

$u'(x) = 1$ $\qquad v'(x) = e^{x}$

$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$

$= e^{x} + xe^{x}$

4) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - x + 1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ Quotient

avec $u(x) = x + 2$ $\qquad v(x) = x^2 - x + 1$

$u'(x) = 1$ $\qquad v'(x) = 2x - 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{x^2 - x + 1 - (x+2)(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$ ← ne jamais développer le dénominateur

$$= \frac{x^2 - x + 1 - (2x^2 - x + 4x - 2)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 4x + 3}{(x^2 - x + 1)^2}$$

5) $f(x) = 2x - 5\ln(x)$

$f'(x) = 2 - 5 \times \dfrac{1}{x} = 2 - \dfrac{5}{x} = \dfrac{2x - 5}{x}$

6) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = \ln(x)$ $\qquad v(x) = x$

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

7) $f(x) = \sqrt{x}\ \ln(x)$

$= u(x)\ v(x)$

avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \ln(x)$

$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \sqrt{x} \times \frac{1}{x}$$

Remarque : $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \times \cancel{\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}$$

Exercice supplémentaire : faire le tableau de signe de toutes ces dérivées.