TD – AN9

SÉRIES NUMÉRIQUES

Applications directes du cours

ADC 1 Déterminer la nature des séries numériques suivantes et, en cas de convergence, leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n+1)\ln(n)}$

ADC 2 Déterminer la nature des séries numériques suivantes et, en cas de convergence, leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(n)$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n}{3^{n-1}}$
5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt{1+\frac{1}{n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{2n}}{3^n}$
7. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^{3n-1}}$
8. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n(n-1)4^n}{7^n}$

Exercices

Exercice 1 On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n(n+1)} + \dfrac{b}{(n+1)(n+2)}$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2 **Série harmonique alternée**

Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, pour tout $n \geqslant 1$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que la suite (S_{2n}) est une suite décroissante.
2. Montrer que la suite (S_{2n+1}) est une suite croissante.
3. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Exercice 3

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{4^n}$ converge et calculer sa somme.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{n!}$ converge et calculer sa somme.

Pour aller plus loin

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 = a \in]0,1[$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Démontrer que la suite (u_n) décroît vers 0.
2. Prouver la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ et calculer sa somme.
3. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.