TD – AN9

Corrigé des PAPL

Exercice 4

1. On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$ (récurrence) et que (u_n) est décroissante. Donc elle converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$, donc $\ell = 0$.

2. $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$. On a une série téléscopique.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0 - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0 \in \mathbb{R}.$$

3. Par télescopage toujours,

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\ ) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \in \mathbb{R}.$$

Donc la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.