Corrigé Exercices - TD ANG

Séries

Exercice 1

1) $$\frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{(n+1)(n+2)} = \frac{a(n+2) + bn}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

Par identification des coefficients du numérateur, on a :

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1/2}{k(k+1)} - \frac{1/2}{(k+1)(k+2)} \right)$$

$$= \frac{1/2}{1 \times 2} - \frac{1/2}{(n+1)(n+2)} \quad \text{par télescopage}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$$

Donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et la somme est $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

Exercice 2

1) $$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+2} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k$$

$$= u_{2n+2} + u_{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+2} + \frac{-1}{2n+1}$$

$$= \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} < 0$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc (S_{2n}) est décroissante.

2) $$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{2n+3} u_k - \sum_{k=1}^{2n+1} u_k$$
$$= u_{2n+3} + u_{2n+2}$$
$$= \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2}$$
$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} > 0$$

Donc (S_{2n+1}) est croissante.

3) $$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k = u_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Les trois points précédents montrent que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers un même réel ℓ.

Puisqu'elles ont la même limite, un résultat du cours permet d'affirmer que (S_n) converge également vers ℓ.

Ceci signifie que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Exercice 3 Astuce : $n^2 = n(n-1) + n$

1) $$u_n = \frac{n^2}{4^n} = \frac{n(n-1)}{4^n} + \frac{n}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + \frac{1}{4}\, n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

or $\sum n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$ et $\sum n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ sont des séries géométriques dérivées de raison $\frac{1}{4} \in]-1,1[$: elles convergent.

Par combinaison linéaire, $\sum u_n$ converge.

Sa somme est
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{16} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$= \frac{2\times 4^3}{16\times 3^3} + \frac{4^2}{4\times 3^2}$$
$$= \frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{20}{27}$$

2) $\displaystyle \frac{n^2}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!}$

Or $\displaystyle \frac{n}{n!} = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

$$\frac{n(n-1)}{n!} = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)!} & \text{si } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k!} = 0 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-2)!} + \frac{1}{(k-1)!} \right)$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)!}$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{i!} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!}$$

Or $\displaystyle \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i!}$ est une série exponentielle convergente.

On a : $\displaystyle \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} = e^1 = e$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i!} = e - \frac{1}{0!} = e - 1$$

Donc $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{k!} \right) = 1 + e + e - 1 = 2e \in \mathbb{R}.$

Donc $\displaystyle \sum \frac{n^2}{n!}$ converge et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n} = 2e.$$