Corrigé ADC - TD ANG

Séries

ADC1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \right) = \sqrt{n+1} - \sqrt{0} = \sqrt{n+1} \quad \text{par télescopage}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$ diverge.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3} \right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$$

car $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} = 0$

La série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^n}$ converge et la somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k+1)\ln(k)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(k+1)\ln(k)}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right)$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \quad \text{par télescopage}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\ln(2)} \in \mathbb{R}$$

Donc la série $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n+1)\ln(n)}$ converge et sa somme est

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n+1)\ln(n)} = \frac{1}{\ln(2)}$$

ADL 2 - Séries usuelles

1) . $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Or $\frac{1}{e} \in]-1,1[$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}$ est une série géométrique convergente.

. Sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$$

2) $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty \neq 0$ donc $\sum_{n\geq 1} \ln(n)$ diverge grossièrement

3) $\frac{1}{2^n n!} = \frac{(1/2)^n}{n!}$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n n!}$ est une série exponentielle, elle converge.

Sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} = e^{1/2} = \sqrt{e}$

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\frac{n}{3^{n-1}} = n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. et $\frac{1}{3} \in]-1,1[$.

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n}{3^{n-1}}$ est une série géométrique dérivée première convergente.

Sa somme est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{4}$

5) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt{1+\frac{1}{n}}$ diverge grossièrement.

6) $\frac{2^{2n}}{3^n} = \frac{(2^2)^n}{3^n} = \frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Or $\frac{4}{3} \geq 1$

donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{2n}}{3^n}$ est une série géométrique divergente

7) $\frac{1}{2^{3n-1}} = \frac{1}{(2^3)^n \times 2^{-1}} = 2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$

$\frac{1}{8} \in]-1,1[$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{8}\right)^n$ converge (série géométrique).

Par combinaison linéaire, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{3n-1}}$ converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 2\times \frac{1}{8} \times \frac{1}{1-1/8} = \frac{2}{7}.$$

8) $\frac{n(n-1)\,4^n}{7^n} = n(n-1)\left(\frac{4}{7}\right)^{n-2} \times \left(\frac{4}{7}\right)^2$. Or $\frac{4}{7} \in]-1,1[$ donc

on a une série géométrique dérivée seconde convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)\,4^n}{7^n} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \frac{2}{(1-\frac{4}{7})^3} = \frac{4^2}{7^2} \times 2\,\frac{7^3}{3^3} = \frac{224}{27}$$