TD – AN8

Dérivation

Applications directes du cours

ADC 1 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.

ADC 2 Déterminer la limite quand $x \to 1$ de $\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x-1}$.

ADC 3 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x < 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

ADC 4 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f, son domaine de dérivabilité $\mathcal{D}'$ puis calculer l'expression de f'.

1. $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^2+1}$
2. $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x-1}$
5. $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
6. $f : x \mapsto 2^x$

ADC 5 Soit $h : x \mapsto \mathrm{e}^x - 2\ln(x+1)$.

1. Montrer que h est convexe sur $]-1, +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x > -1$, $h(x) \geqslant 1 - x$.

Exercices

Exercice 1 Soit $f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \end{array}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f le prolongement. Préciser $f(0)$.
2. Étudier alors la dérivabilité de f en 0.

Exercice 2 On considère $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 3 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que
$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$
2. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$.
3. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que
$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|.$$
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Démontrer que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}.$$
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

Exercice 5

On considère la fonction $g\colon t \mapsto t^2 - t\ln(t)$ définie sur $]0, +\infty[$.
Étudier la convexité de g. On précisera les éventuels points d'inflexion.

Pour aller plus loin

Exercice 6 En appliquant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout $t > 0$,
$$\frac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1) - \ln(t) \leqslant \frac{1}{t}.$$