TD AN8 : Exercices

Exercice 1

1) Soit $x>0$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x} = 0$ donc, par composée,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

2) On a
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Soit $x>0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -Xe^{X} \quad \text{avec} \quad X = -\frac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty$$

Or $\lim\limits_{X\to -\infty} Xe^{X} = 0$ par croissance comparée.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0)=0.}$

Exercice 2

1) • Par produit, $x \mapsto x^2 \ln(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• <u>En 0</u>

Par croissance comparée, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 \ln(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

• Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$

2) • Par produit, $x \mapsto x^2 \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

• <u>En 0</u> : Soit $x>0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \ln(x)}{x} = x \ln(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x>0}]{} 0 \in \mathbb{R} \text{ par croissance comparée}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

• Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$

3) Pour $x>0$, $f'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x$.

Ainsi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\ln(x) + x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Montrons que f' est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit et somme de $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$.

En 0 : par croissance comparée et somme,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (2x\ln(x) + x) = 2 \times 0 + 0 = 0 = f'(0).$$

Donc f' est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}_+$

Par conséquent, $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

4) f est 2 fois dérivable en 0 si f' est dérivable en 0.

Pour $x>0$, $\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \dfrac{2x\ln(x) + x - 0}{x} = 2\ln(x) + 1 \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x>0}]{} -\infty \notin \mathbb{R}$.

Donc f' n'est pas dérivable en 0.

$\boxed{f \text{ n'est dérivable qu'une seule fois en } 0.}$

Exercice 3

1) . $x \mapsto 1+e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1+e^{-x} > 1 > 0$.

. $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

Donc, par composée, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-e^{-x} \times e^{x}}{(1+e^{-x}) \times e^{x}} = \frac{-1}{e^{x}+1}$$

$f'(x) \leq 0$ donc
$$|f'(x)| = -f'(x) = \frac{1}{e^{x}+1}$$

$\forall x \geqslant 0, \quad e^{x} \geqslant 1$ donc $e^{x}+1 \geqslant 2$

donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

2) Notons $g : x \mapsto f(x)-x$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ par différence.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-1}{e^{x}+1} - 1 < 0$$

Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et elle y est continue (car $\mathcal{C}^1$).

$g(0) = f(0) = \ln(2) > 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Puisque $0 \in]-\infty, \ln(2)]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'après le théorème de la bijection.

Puisque $g(x) = 0 \iff f(x) = x$, on a montré que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

3) · f est dérivable (car $\mathcal{C}^1$) sur $I = \mathbb{R}_+$.

· $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous $\begin{cases} a = \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ b = x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

Or $f(\alpha) = \alpha$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ , \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

4) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Initialisation : $u_0 = 0 \geq 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$.

$$u_{n+1} = \ln(1 + e^{-u_n}) \geq 0 \quad \text{car} \quad 1 + e^{-u_n} \geq 1$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

b)

Initialisation : Pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha| = |-\alpha| = \alpha$ car $\alpha \geq 0$

Donc $|u_0 - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^0}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}$

Alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &= |f(u_n) - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \quad \text{par 3) avec } x = u_n \in \mathbb{R}_+ \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{\alpha}{2^n} \\ &\leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}$

c) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$ et $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}$

Donc, par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$$

Exercice 4

1) f est rationnelle donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition $\{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2) Initialisation : $n = 1$, Pour $x \neq 1$

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{(-1)^1 \times 1!}{(x-1)^2}$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, $\forall x \neq 1$ $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \, n!}{(x-1)^{n+1}}$.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \, (x-1)^{-(n+1)}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$$

$$= (-1)^n n! \times \left[-(n+1)\,(x-1)^{-(n+1)-1}\right)$$

$$= -(-1)^n \, n! \, (n+1) \, (x-1)^{-n-2}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \, (n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \neq 1$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \, n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Exercice 5

- $t \mapsto t^2$, $t \mapsto t$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

  $t \mapsto \ln(t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Par produit et différence, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Soit $t > 0$.

$$g'(t) = 2t - \left(\ln(t) + t \times \frac{1}{t}\right) = 2t - \ln(t) - 1$$

$$g''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t-1}{t}$$: du signe de $2t-1$ car $t>0$.

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g''(t)$	$\|$	$-$	0	$+$	

- Conclusion :

  g est concave sur $]0, \frac{1}{2}]$ et convexe sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

  Il y a un point d'inflexion en $\frac{1}{2}$.