TD AN8 : ADC

ADC 1

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

$x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

En 0

Soit $x > 0$. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \in \mathbb{R}$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

ADC 2

- exp est dérivable en 1 donc

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e^1}{x - 1} = \exp'(1) = e.$$

- ou : on pose $h = x - 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

$$\frac{e^x - e}{x-1} = \frac{e^{1+h} - e}{h} = e \times \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} e \times 1 = e$$ par taux d'accroissement usuel

ADC 3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

* sur $]-\infty, 1[$, $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{2}$, polynomiale donc f est dérivable sur $]-\infty, 1[$

* idem, sur $]1, +\infty[$, f est polynomiale donc dérivable

* f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc elle y est aussi continue.

En 1 : $f(1) = 2-1 = 1$.

* Continuité

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2-x) = 2-1 = 1 = f(1)$$

Donc f est continue en 1, donc sur $\mathbb{R}$

* Dérivabilité

Soit $x<1$:
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x-1}$$
$$= \frac{1-x^2}{2(x-1)}$$
$$= \frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{-2\cancel{(1-x)}}$$
$$= \frac{1+x}{-2}$$
$$\xrightarrow[x\to 1^-]{} -1$$

Soit $x>1$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{2-x-1}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = -1 \xrightarrow[x\to 1^+]{} -1$

Donc $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1 \in \mathbb{R}$

Ainsi f est dérivable en 1 donc sur $\mathbb{R}$.

Rq : La continuité en 1 était inutile, elle se déduit de la dérivabilité en 1.

ADC 6

1) $f : x \mapsto x e^{x^2+1}$.

$x \mapsto x$, $x \mapsto x^2+1$ et $x \mapsto e^x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composée et produit, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{x^2+1} + 2x^2 e^{x^2+1} = e^{x^2+1}(1+2x^2)$

2) $f : x \mapsto \ln(x^2-1)$

$x \mapsto x^2-1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $\ln$ l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composée, f est définie et dérivable sur :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2-1>0 \} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

3) $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$.

$x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par quotient, f est définie et dérivable sur

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \{ x \in \mathbb{R}_+^* \mid \ln(x) \neq 0 \} =]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

$$\forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$$

4) f rationnelle donc définie et dérivable sur $\{ x \in \mathbb{R} \mid x-1 \neq 0 \}$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

5) $f : x \to \sqrt{1-x^2}$

$x \mapsto 1-x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ mais dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composée, f est définie sur

x		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\mathcal{D} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0 \} = [-1,1]$$

et dérivable sur

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 > 0 \} =]-1,1[$$

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Étudions la dérivabilité en 1 et en −1.

Soit $x \in]-1,1[$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{1-x^2}-0}{x-1}$$

Posons $h = 1-x \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^+$

x		1	
$1-x$	$+$	0	$-$

(Avec $\sqrt{\ }$, mieux vaut avoir des nombres ≥ 0)

$x < 1$ donc $h > 0$, $x = 1-h$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{1-(1-h)^2}}{-h}$$

$$= -\frac{\sqrt{2h-h^2}}{h}$$

$$= -\frac{\sqrt{h}\sqrt{2-h}}{h} \qquad \text{car } h>0,\ 2-h>0$$

$$= -\frac{\sqrt{2-h}}{\sqrt{h}} \qquad \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\xrightarrow[h \to 0^+]{} -\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable en 1.

Puisque f est paire $\left(f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x) \right)$, f n'est pas dérivable en −1 non plus.

<u>Conclusion</u> : $\mathcal{D}' =]-1,1[$.

6) $f : x \mapsto 2^x = \exp\left(x\ln(2)\right)$

$x \mapsto x\ln(2)$ et exp sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{R}.$$

$\forall x \in \mathcal{D}'$, $\quad f'(x) = \ln(2)\exp\left(x\ln(2)\right) = \ln(2)\,2^x$.

<u>ADC 5</u>

1) • h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$

car $1+x>0 \iff x>-1$.

• $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\quad h'(x) = e^x - \dfrac{2}{1+x}$

$$h''(x) = e^x + \frac{2}{(1+x)^2} \geqslant 0$$

Donc h est <u>convexe</u> sur $]-1,+\infty[$.

2) La tangente à $\mathcal{C}_h$ en 0 est $T_0 : y = -x+1$

car $h'(0) = 1-2 = -1$ et $h(0) = 1$.

Puis h est convexe, $\mathcal{C}_h$ est au dessus de T_0 :

$$\forall x > -1, \quad h(x) \geqslant 1-x .$$