TD – AN10

PRIMITIVES ET INTÉGRALES

Applications directes du cours

ADC 1 Calculer, sur un intervalle approprié, une primitive des fonctions suivantes :

1. $f\colon x \mapsto x^2 - 3x + 5$;
2. $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4}$;
3. $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-3x} + x^3 - 1$;
4. $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x} + x^2$;
5. $f\colon x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$;
6. $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-5x} - 2\,\mathrm{e}^{7x}$;
7. $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$;
8. $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x}$;
9. $f\colon x \mapsto \sqrt{2x} + 3$;
10. $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$;
11. $f\colon x \mapsto \dfrac{8}{x\sqrt{x}}$;
12. $f\colon x \mapsto x(x+2)^2$;
13. $f\colon x \mapsto \dfrac{1 + x^2 - x^4}{x^2}$;
14. $f\colon x \mapsto 2^x$.

ADC 2 Calculer, sur un intervalle approprié, une primitive des fonctions suivantes :

1. $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$;
2. $f\colon x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+2x}$;
3. $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+1}$;
4. $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^x(2\,\mathrm{e}^x - 3)^3$;
5. $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{x-4}$;
6. $f\colon x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$;
7. $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$;
8. $f\colon x \mapsto \dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;
9. $f\colon x \mapsto (2x^2-3)^2$;
10. $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$;
11. $f\colon x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$;
12. $f\colon x \mapsto \dfrac{\ln(x)^2}{x}$;
13. $f\colon x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^{2x})^2}$.

ADC 3 Donner l'ensemble des primitives de $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(x^4+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

ADC 4 Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 7$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(1) = 2$.

ADC 5 Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer :

1. $I_1 = \displaystyle\int_4^5 \frac{1}{3-t}\,\mathrm{d}t$;
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 (3x-1)^2\,\mathrm{d}x$;
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u}$;
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$;
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^4 t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$;
6. $I_6 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\,\mathrm{d}t$.

ADC 6 Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 t\exp(-2t)\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{d}t$.

ADC 7 Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (2x+1)\exp(3x)$;
2. $g : x \mapsto x^2\ln(x)$.

ADC 8 Calculer, à l'aide de <u>deux</u> intégrations par parties successives, $\displaystyle\int_0^1 (t^2+1)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

ADC 9 Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln(x))^n}{x}\,\mathrm{d}x$, en posant $y = \ln(x)$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, en posant $t = \mathrm{e}^x$;
3. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 \mathrm{d}t$ $(x > 0)$, en posant $u = 1 + \dfrac{1}{t}$;
4. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}}\,\mathrm{d}t$, en posant $u = \ln(t)$;
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$, en posant $x = \mathrm{e}^{-t}$;
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$, en posant $t = x^2$.

Exercices

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4x+3}$. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}.$$
En déduire une primitive de f sur $]-\infty, 1[$.
2. Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, $4x^2 - 4x + 1$.
En déduire une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{1}{4x^2-4x+1}$ sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

Exercice 2 Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 Soit f_0 la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_0(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et soit, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = (1-x)^n\,\mathrm{e}^{-3x}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$.
3. En déduire la valeur de I_1 et I_2.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
5. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
4. En utilisant la question 2, montrer que $nI_n \leqslant \mathrm{e}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 Dans chaque cas, justifier que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée :

1. $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
2. $G(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \exp(t^3)\,\mathrm{d}t$
3. $H(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \ln(t^2+2)\,\mathrm{d}t$

Exercice 6

1. Justifier que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant x$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2-x^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est impaire, à l'aide du changement de variable $u = -t$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - 2xf(x)$.

Pour aller plus loin

Exercice 8 On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}I_n$.
3. Calculer alors I_1 et I_2.

Exercice 9 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$, pour $x \in [0,1]$.

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
On considère également la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}.$$
2. (a) Soit $x \geqslant \frac{1}{2}$. Montrer que $g(x) \geqslant \mathrm{e} \times \ln(2x)$.
   (b) Établir pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, l'inégalité $g(x) \leqslant \mathrm{e}^{2x}\ln(2x)$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x)$.
3. Déterminer les variations de g et dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}_+^*$.