TD – AN10

Corrigé des PAPL

Exercice 8 1. $I_0 = \int_0^1 (1-x)^{1/2} = \Big[-\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2} \Big]_0^1 = \frac{2}{3}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$u(x) = x^{n+1} \qquad v(x) = -\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2} = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$$
$$u'(x) = (n+1)x^n \qquad v'(x) = (1-x)^{1/2}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \Big[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}x^{n+1} \Big]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n \frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 x^n(1-x)\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, en développant :

$$x^n(1-x)\sqrt{1-x} = x^n\sqrt{1-x} - x^{n+1}\sqrt{1-x}$$

Par linéarité de l'intégrale

$$I_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)\left(I_n - I_{n+1}\right)$$

En isolant I_{n+1} on trouve $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$.

3. $I_1 = \frac{2}{5}I_0 = \frac{4}{15}$. De même, $I_2 = \frac{16}{105}$

Exercice 9 Calculer $\int_0^1 \min(x,t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$, pour $x \in [0,1]$.

Si $t \in [0,x]$, alors $\min(x,t) = t$ et sinon, $\min(x,t) = x$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \min(x,t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \min(x,t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \min(x,t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t^{3/2}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 x\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{5}x^{5/2} + x\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x^{3/2}\right) \\ &= -\frac{4}{15}x^{5/2} + \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

Exercice 10 1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit, donc elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g(x) = F(2x) - F(1).}$$

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (primitive) et $F' = f$ est continue, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $x \mapsto 2x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composée, $x \mapsto F(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par somme (avec une constante), $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g'(x) = 2F'(2x) = 2f(2x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}.}$$

Remarque : il y avait ici une coquille dans l'énoncé. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc ne peut pas être dérivable sur $\mathbb{R}$. Cela arrive aussi dans les sujets de concours.

2. (a) Soit $x \geqslant \frac{1}{2}$. On a alors $1 \leqslant 2x$. Si $t \in [1, 2x]$, alors $\mathrm{e}^t \geqslant \mathrm{e}$ (croissance de exp), donc $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}}{t}$. Par croissance de l'intégrale ($1 \leqslant 2x$) :

$$\boxed{g(x) \geqslant \int_1^{2x} \frac{\mathrm{e}}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}\ln(|t|)\Big]_1^{2x} = \mathrm{e}\ln(2x).}$$

(b) Si $x \in]0, \frac{1}{2}]$, $2x \leqslant 1$, les bornes ne sont pas dans le bon ordre.

$$g(x) = -\int_{2x}^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $t \in [2x, 1]$, $\mathrm{e}^t \geqslant \mathrm{e}^{2x}$ puis $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{t}$. Par croissance de l'intégrale ($2x \leqslant 1$),

$$\int_{2x}^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{2x}^{1} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{2x}\Big[\ln(|t|)\Big]_{2x}^{1} = -\,\mathrm{e}^{2x}\ln(2x).$$

Donc $\boxed{g(x) \leqslant \mathrm{e}^{2x}\ln(2x).}$

(c) Pour la limite en $+\infty$, on utilise l'inégalité de 3a), valable sur pour $x \geqslant 1/2$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}\ln(2x) = +\infty$, d'après le théorème d'existence d'une limite par minoration, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$

Pour la limite en 0^+, on utilise l'inégalité de 3b), valable sur pour $0 < x \leqslant 1/2$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{2x}\ln(2x) = -\infty$, d'après le théorème d'existence d'une limite par majoration, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty.}$

3. D'après la question 2, pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x} > 0$ donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

Le tableau de variation est

x	0		$+\infty$
g	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$