TD – AN10

Corrigé des exercices

Exercice 1

1. On trouve $a = -\frac{3}{2}$ et $b = \frac{7}{2}$. Sur $]-\infty, 1[$, $x-1<0$ et $x-3<0$ donc une primitive de f sur $]-\infty, -1[$ est
$$F : x \mapsto -\frac{3}{2}\ln(|x-1|) + \frac{7}{2}\ln(|x-3|) = -\frac{3}{2}\ln(1-x) + \frac{7}{2}\ln(3-x)$$

2. $g(x) = \dfrac{1}{4x^2-4x+1} = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$ donc une primitive de g sur $]1/2, +\infty[$ est
$$G : x \mapsto -\frac{1}{2(2x-1)}.$$

Exercice 2

$I = \displaystyle\int_1^2 \ln(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_1^2 1 \times \ln(x)^2\,\mathrm{d}x.$

Posons
$$u(x) = \ln(x)^2 \qquad v(x) = x$$
$$u'(x) = \frac{2}{x}\ln(x) \qquad v'(x) = 1$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ donc par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x)^2\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(x)^2\Big]_1^2 - \int_1^2 2\ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2)^2 - 2\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Posons
$$u_2(x) = \ln(x) \qquad v_2(x) = x$$
$$u_2'(x) = \frac{1}{x} \qquad v_2'(x) = 1$$

u_2 et v_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ donc par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - 1\end{aligned}$$

Donc
$$\int_1^2 \ln(x)^2\,\mathrm{d}x = 2\ln(2)^2 - 4\ln(2) + 2$$

Exercice 3

1. $\boxed{I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-3x}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} \right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-3}}{3}.}$

2. Soit $n \geqslant 0$. $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}\, \mathrm{d}x$.

   Posons, $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties,

   $$I_{n+1} = \left[-\frac{1}{3}(1-x)^{n+1}\mathrm{e}^{-3x} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-x)^n \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

   car $(n+1) > 0$. On a bien montré : $\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.}$

3. $\boxed{I_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}I_0 = \frac{2+\mathrm{e}^{-3}}{9}}$ et $\boxed{I_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}I_1 = \frac{5-2\,\mathrm{e}^{-3}}{27}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. Alors $-3x \leqslant 0$ donc $0 \leqslant \mathrm{e}^{-3x} \leqslant 1$ par croissance de exp. Ainsi, $0 \leqslant f(x) \leqslant (1-x)^n$ car $(1-x)^n \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale entre 0 et 1 ($0 \leqslant 1$), on a :

   $$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 (1-x)^n\, \mathrm{d}x$$

   Or, $\int_0^1 (1-x)^n\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Par conséquent, $\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après la question précédente et le théorème de convergence par encadrement, $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ converge vers } 0.}$

Exercice 4

1. $I_0 = \mathrm{e} - 1$

2. On pose

   $$u(x) = \ln(x)^n \qquad v(x) = x$$
   $$u'(x) = \frac{n+1}{x}\ln(x)^n \qquad v'(x) = 1$$

   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,\mathrm{e}]$ donc par intégration par parties :

   $$\begin{aligned} I_n n + 1 = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)^{n+1}\, \mathrm{d}x &= \Big[x\ln(x)^{n+1} \Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} (n+1)\ln(x)^n\, \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - (n+1) I_n \end{aligned}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1,\mathrm{e}]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \ln(x)^{n+1} \leqslant \ln(x)^n$. Par croissance de l'intégrale (on a bien $1 \leqslant \mathrm{e}$) :

   $$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

   Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

4. D'après la question 2, $I_{n+1} = \mathrm{e} - nI_n - I_n$ donc $nI_n = \mathrm{e} - (I_n + I_{n+1}) \leqslant \mathrm{e}$ car $I_n + I_{n+1} \geqslant 0$. On a donc $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 5

1. La fonction $f : t \mapsto \sqrt{t^2+1}$ est, par composée, continue sur $\mathbb{R}$ ($1+t^2 \geqslant 0$). D'après le théorème fondamental, $F : x \mapsto \int_1^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.
   On a donc :
   - F est dérivable (car c'est une primitive) ;
   - $F' = f$ donc F' est continue sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi, F est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) = \sqrt{x^2+1}$
2. Ici, G n'est pas la fonction du théorème fondamental de l'analyse. On procède autrement.
   La fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composée. Elle admet donc une primitive G_1 sur $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$G(x) = G_1(2x) - G_1(0).$$
   - G_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G_1' = g$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc G_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - $x \mapsto 2x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $G_1(0)$ est une constante donc par composée et somme, G est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout réel x
     $$G'(x) = 2G_1'(2x) - 0 = 2g(2x) = 2\exp(8x^3).$$
3. $h : t \mapsto \ln(t^2+2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $t^2+2>0$ pour tout réel t ($\Delta < 0$). Elle admet donc une primitive H_1 sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x
   $$H(x) = H_1(x^3) - H_1(x^2)$$
   Comme précédemment, on montre que H_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis par composée, H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x
   $$H'(x) = 3x^2H_1'(x^3) - 2xH_1'(x^2) = 3x^2h(x^3) - 2xh(x^2) = 3x^2\ln(x^6+2) - 2x\ln(x^4+2)$$

Exercice 6

1. Soit $x > 0$. Pour $t \in [x, 2x]$ (on a bien $x \leqslant 2x$) , $\mathrm{e}^t \geqslant t$ (cours) donc puisque $t \geqslant x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant 1$. Par croissance de l'intégrale sur $[x, 2x]$:
   $$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t = 2x - x = x.$$
2. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par minoration $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Exercice 7

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, centré en 0.
   Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \mathrm{e}^{t^2-(-x)^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=-t}{=} \int_0^x \mathrm{e}^{(-u)^2-x^2}(-\,\mathrm{d}u) = -f(x)$.
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}G(x)$ où $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $g : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$. G est dérivable donc par produit, f aussi et
   $$f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}G(x) + \mathrm{e}^{-x^2}G'(x) = -2xf(x) + 1.$$