TD – AN10

Corrigé des ADC

ADC 1 Réponses non détaillées.

1. $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 5x$ sur $\mathbb{R}$.
2. $F : x \mapsto \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^5}{20}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $F : x \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{3} + \dfrac{x^4}{4} - x$ sur $\mathbb{R}$.
4. $F : x \mapsto \ln(|x|) + \dfrac{x^3}{3}$ ce qui donne $F(x) = \ln(x) + \dfrac{x^3}{3}$ sur $]0, +\infty[$ et $F(x) = \ln(-x) + \dfrac{x^3}{3}$ sur $]-\infty, 0[$.
5. $F : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
6. $F : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3} - \dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{5} - \dfrac{2}{7}\,\mathrm{e}^{7x}$ sur $\mathbb{R}$.
7. $F : x \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(|x|)$ (car $f(x) = \dfrac{1}{2x}$) ce qui donne $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ et $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(-x)$ sur $]-\infty, 0[$.
9. $F : x \mapsto \sqrt{2} \times \dfrac{2}{3} \times x^{3/2} + 3x = \dfrac{2x\sqrt{2x}}{3} + 3x$ (car $f(x) = \sqrt{2} \times x^{1/2} + 3$) sur $[0, +\infty[$.
10. $F : x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x}$ (car $f(x) = x^{-3} - x^{-2}$) sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$.
11. $F : x \mapsto -\dfrac{16}{\sqrt{x}}$ (car $f(x) = 8x^{-3/2}$) sur $]0, +\infty[$.
12. $F : x \mapsto \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{4x^3}{3} + 2x^2$ (car $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$) sur $\mathbb{R}$.
13. $F : x \mapsto -\dfrac{1}{x} + x - \dfrac{x^3}{3}$ (car $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1 - x^2$) sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$.
14. $F : x \mapsto \dfrac{2^x}{\ln(2)}$ (car $f(x) = \exp(\ln(2)x)$) sur $\mathbb{R}$.

ADC 2 Réponses non détaillées.

1. $F\colon x \mapsto -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $F\colon x \mapsto \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2+2x}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $F\colon x \mapsto \dfrac{1}{3}\ln(|x^3+1|)$ donc $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(x^3+1)$ sur $]-1, +\infty[$ et $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(-x^3-1)$ sur $]-\infty, -1[$.
4. $F\colon x \mapsto \dfrac{1}{8}(2\,\mathrm{e}^x - 3)^4$ sur $\mathbb{R}$;
5. On écrit $f(x) = 1 + \dfrac{4}{x-4}$. $F\colon x \mapsto x + 4\ln(|x-4|)$ donc $F(x) = x + 4\ln(x-4)$ sur $]4, +\infty[$ et $F(x) = x + 4\ln(4-x)$ sur $]-\infty, 4[$.
6. $F\colon x \mapsto \dfrac{\ln(x)^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;

7. $F\colon x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur $]1,+\infty[$;
   $F\colon x \mapsto \ln(-\ln(x))$ sur $]0,1[$;
8. $F\colon x \mapsto 3\sqrt{x^2-4x+3}$ sur $]-\infty,1[$ ou sur $]3,+\infty[$.
9. $F\colon x \mapsto \dfrac{4}{5}x^5 - 4x^3 + 9x$ sur $\mathbb{R}$ (on développe $f(x)$) ;
10. $F\colon x \mapsto -\dfrac{1}{2(x-1)^2}$ sur $]-\infty,1[$ ou sur $]1,+\infty[$;
11. $F\colon x \mapsto -\ln(|1-\mathrm{e}^x|)$ c'est-à-dire $F(x) = -\ln(1-\mathrm{e}^x)$ sur $]-\infty,0[$ et $F(x) = -\ln(\mathrm{e}^x-1)$ sur $]0,+\infty[$;
12. $F\colon x \mapsto \dfrac{\ln(x)^3}{3}$ sur $]0,+\infty[$;
13. $F\colon x \mapsto -\dfrac{1}{2(1+\mathrm{e}^{2x})}$ sur $\mathbb{R}$.

ADC 3 $\left\{x \mapsto -\dfrac{1}{8(x^4+1)^2} + c\ ,\ c \in \mathbb{R}\right\}$.

ADC 4 Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F : x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - x^3 + 7x + c$, $c \in \mathbb{R}$. $F(1) = 2$ donne $c = -\dfrac{17}{4}$ donc $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 + 7x - \dfrac{17}{4}$.

ADC 5

1. $t \mapsto \dfrac{1}{3-t}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ (fonction rationnellle) donc sur $[4,5]$ donc I_1 existe.
$$I_1 = \Big[-\ln(|3-t|)\Big]_4^5 = -\ln(2) + \ln(1) = -\ln(2).$$
2. $x \mapsto (3x-1)^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc sur $[1,2]$ donc I_2 existe.
$$I_2 = \left[\frac{1}{9}(3x-1)^3\right]_1^2 = \frac{125}{9} - \frac{8}{9} = \frac{117}{9} = 13.$$
3. $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $[1,2]$ donc I_3 existe.
$$I_3 = \Big[\ln(|u|)\Big]_1^2 = \ln(2).$$
4. $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (fonction rationnelle) donc sur $[0,1]$ donc I_4 existe.
$$I_4 = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \Big[x - \ln(|x+1|)\Big]_0^1 = (1-\ln(2)) - (0-\ln(1)) = 1-\ln(2).$$
5. $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,4]$ donc I_5 existe.
$$I_5 = \Big[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big]_0^4 = 1 - \mathrm{e}^{-8}.$$
6. $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, $t \mapsto \ln(t)$ l'est sur $]0,+\infty[$ donc par composée, $t \mapsto \sqrt{\ln(t)}$ est continue sur $\{t \in \mathbb{R}_+^* \mid \ln(t) \geqslant 0\} = [1,+\infty[$. De plus $t \mapsto t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par quotient, $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}$ est continue sur
$$\{t \geqslant 1 \mid t \neq 0 \text{ et } \sqrt{\ln(t)} \neq 0\} =]1,+\infty[.$$
En particulier, elle est continue sur $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ donc I_6 existe.
$$I_6 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 2 \times \frac{\frac{1}{t}}{2\sqrt{\ln(t)}}\,\mathrm{d}t = 2\Big[\sqrt{\ln(t)}\Big]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = 2(\sqrt{2}-\sqrt{1}) = 2\sqrt{2}-2.$$

ADC 6 1. Posons

$$u(t) = t \qquad v(t) = -\frac{1}{2}\exp(-2t)$$
$$u'(t) = 1 \qquad v'(t) = \exp(-2t)$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\exp(-2t)\,\mathrm{d}t &= \left[t \times \left(-\frac{1}{2}\exp(-2t)\right)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}\exp(-2t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2}\exp(-2) - \left[\frac{1}{4}\exp(-2t)\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{2}\exp(-2) - \left(\frac{1}{4}\exp(-2) - \frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\exp(-2)\end{aligned}$$

2. Posons

$$u(t) = 1-t \qquad v(t) = \frac{1}{4}\exp(4t)$$
$$u'(t) = -1 \qquad v'(t) = \exp(4t)$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{4}(1-t)\,\mathrm{e}^{4t}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{4t}\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^4 - \frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{16}\,\mathrm{e}^4 - \frac{5}{16}\end{aligned}$$

ADC 7 1. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_0^x (2t+1)\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t$$

Posons

$$u(t) = 2t+1 \qquad v(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3t}$$
$$u'(t) = 2 \qquad v'(t) = \mathrm{e}^{3t}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}F(x) &= \left[\frac{1}{3}(2t+1)\,\mathrm{e}^{3t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{3}(2x+1)\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3t}\right]_0^x\\ &= \frac{1}{3}(2x+1)\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{9}(6x+1)\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{9}\end{aligned}$$

2. g est continue sur $]0,+\infty[$ donc d'après le théorème fondamental la fonction $G : x \mapsto \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$.
Soit $x \in]0,+\infty[$.
$$G(x) = \int_0^x t^2 \times \ln(t)\,\mathrm{d}t$$
Posons
$$u(t) = \ln(t) \qquad v(t) = \frac{t^3}{3}$$
$$u'(t) = \frac{1}{t} \qquad v'(t) = t^2$$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc par intégration par parties :
$$\begin{aligned} G(x) &= \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

ADC 8 Posons
$$u(t) = t^2 + 1 \qquad v(t) = \mathrm{e}^t$$
$$u'(t) = 2t \qquad v'(t) = \mathrm{e}^t$$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties :
$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^2+1)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &= \left[(t^2+1)\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 2t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= 2\,\mathrm{e} - 1 - 2\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
Posons
$$u_2(t) = t \qquad v_2(t) = \mathrm{e}^t$$
$$u_2'(t) = 1 \qquad v_2'(t) = \mathrm{e}^t$$
u_2 et v_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties :
$$\begin{aligned} \int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &= \left[t\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$
Donc
$$\int_0^1 (t^2+1)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{e} - 3.$$

ADC 9 Réponses non détaillées.

1. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln(x))^n}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y^n\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n+1}$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln(\mathrm{e}+1)$;
3. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4\mathrm{d}t = -\int_1^{1+\frac{1}{x}} u^4\,\mathrm{d}u = \frac{32}{5} - \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5$;

4. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}} = \left[2\sqrt{u+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}-2\,;$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} -\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle= 1-\ln(2)-\frac{1}{\mathrm{e}}+\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}+1\right) = -\ln(2)-\frac{1}{\mathrm{e}}+\ln\left(1+\mathrm{e}\right);$

6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{1}{2}\times\frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle= \frac{1}{2}(\ln(4)-\ln(5)+\ln(2)) = \frac{3}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(5).$