TD – AL7

Applications linéaires

Applications directes du cours

ADC 1 Dans les cas suivants, l'application f est-elle linéaire ? Justifier.

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; (x,y,z)\mapsto(x+2y,x-y-2z,x+z)$;
2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$; $(x,y,z)\mapsto(x-y+z,3x+1)$.
3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$; $(x,y)\mapsto xy$.
4. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$; $(x,y,z,t)\mapsto x+y+z+t$;
5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$; $x\mapsto(x,2x,0)$;
6. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$; $(x,y,z)\mapsto(x+y,z-x^2)$;

ADC 2 On considère l'application $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z,x+z)\end{array}$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f (si celui-ci est non nul, on en donnera une base, en justifiant).
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$.

ADC 3 On considère l'application linéaire $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z,x-y+z,3x-7y+3z)\end{array}$.
Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

ADC 4 On considère l'application linéaire $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z,x-y-z,x+5y+3z)\end{array}$.
Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant $\mathrm{Im}(f)$.

ADC 5 Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y\ ,\ x-y+z\ ,\ x+y)\end{array}$.
Montrer que f est linéaire et bijective et expliciter sa réciproque.

Exercices

Exercice 1 Soit $p:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{3}(2x-y-z,-x+2y-z,-x-y+2z)\end{array}$.

1. Montrer que p est linéaire.
2. Calculer p^2.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$.
4. (a) Justifier que $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$ avec $v_1=(2,-1,-1)$, $v_2=(-1,2,-1)$ et $v_3=(-1,-1,2)$.
   (b) Calculer $v_1+v_2+v_3$.
   (c) En déduire une base de $\mathrm{Im}(p)$.
5. Déterminer des équations définissant $\mathrm{Im}(p)$.
6. L'application p est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $f^2 - 5f + 6\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = 0$. Montrer que f est bijective et donner une expression de sa réciproque en fonction de f et de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Exercice 3 On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+z+t, 2x-y+z+t) \end{array}$.

1. Montrer que f n'est pas injective.
2. Montrer que f est surjective.

Exercice 4 On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-3y, x-4y, x+y) \end{array}$.

1. Montrer que f est injective.
2. Déterminer les éventuels antécédents de $(1,1,1)$ par f.
3. L'application f est-elle surjective ?