TD – AL7

Applications linéaires – Corrigé

Exercice 1

1. Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
p(au+bv) &= p(\underbrace{ax+bx'}_{X}, \underbrace{ay+by'}_{Y}, \underbrace{az+bz'}_{Z}) \\
&= p(X,Y,Z) \\
&= \frac{1}{3}(2X-Y-Z\ ,\ -X+2Y-Z\ ,\ -X-Y+2Z) \\
&= \frac{1}{3}\left(2(ax+bx')-(ay+by')-(az+bz')\ ,\ -(ax+bx')+2(ay+by')-(az+bz')\ ,\right. \\
&\qquad\qquad \left. -(ax+bx')-(ay+by')+2(az+bz')\right) \\
&= a\frac{1}{3}(2x-y-z\ ,\ -x+2y-z\ ,\ -x-y+2z) + b\frac{1}{3}(2x'-y'-z'\ ,\ -x'+2y'-z'\ ,\ -x'-y'+2z') \\
&= ap(u)+bp(v)
\end{aligned}$$

Donc p est bien linéaire.

2. Soit $u = (,x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
p^2(u) &= p(p(x,y,z)) \\
&= p\left(\frac{1}{3}(\underbrace{2x-y-z}_{X}, \underbrace{-x+2y-z}_{Y}, \underbrace{-x-y+2z}_{Z})\right) \\
&= \frac{1}{3}p(X,Y,Z) \qquad \text{par linéairité de } p \\
&= \frac{1}{9}(2X-Y-Z\ ,\ -X+2Y-Z\ ,\ -X-Y+2Z) \\
&= \frac{1}{9}\left(2(2x-y-z)-(-x+2y-z)-(-x-y+2z)\ ,\right. \\
&\qquad -(2x-y-z)+2(-x+2y-z)-(-x-y+2z)\ , \\
&\qquad\qquad \left. -(2x-y-z)-(-x+2y-z)+2(-x-y+2z)\right) \\
&= \frac{1}{9}(6x-3y-3z,\ -3x+6y-3z,\ -3x-3y+6z) \\
&= \frac{1}{3}(2x-y-z\ ,\ -x+2y-z\ ,\ -x-y+2z) \\
&= p(u)
\end{aligned}$$

Donc $p^2 = p$.

3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z\ = 0 \\ -x+2y-z = 0 \\ -x-y+2z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \ldots \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow u = z(1,1,1)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,1,1)}_{u_1})$.

Or, $u_1 \neq (0,0,0)$, donc (u_1) est libre et comme elle est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

4. (a) Puisque $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(p) &= \mathrm{Vect}\big(p(1,0,0)\ ,\ p(0,1,0)\ ,\ p(0,0,1)\big)\\ &= \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\ ,\ \left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\ ,\ \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right).\\ &= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{(2,-1,-1)}_{v_1}\ ,\ \underbrace{(-1,2,-1)}_{v_2}\ ,\ \underbrace{(-1,-1,2)}_{v_3}\right).\end{aligned}$$

(On peut multiplier par 3 à l'intérieur d'un "vect", cela change les vecteurs de la famille génératrice).

(b) On trouve $v_1 + v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

(c) La famille (v_1, v_2, v_3) est liée. On a : $v_3 = -v_1 - v_2$ (par exemple), donc

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2).$$

Dons (v_1, v_2) est génératrice de $\mathrm{Im}(p)$. De plus

$$av_1 + bv_2 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ -a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ 3a = 0 \\ -3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Donc (v_1, v_2) est libre. C'est une base de $\mathrm{Im}(p)$.

5. On va chercher des équations définissant $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$av_1 + bv_2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = x \\ -a + 2b = y \\ \boxed{-a} - b = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b = x + 2z \\ 3b = y - z \\ \boxed{-a} - b = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x + y + z \\ 3\boxed{b} = y - z \\ \boxed{-a} = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{cases}$$

Si $x + y + z = 0$ il y a une solution, sinon il n'y en a pas.
On a donc

$$u \in \mathrm{Im}(p) \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

6. $\mathrm{Ker}(p) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc p n'est pas injective.
p ne peut donc pas être bijective.
De plus, $\mathrm{Im}(p) \neq \mathbb{R}^2$ donc f n'est pas surjective.

Exercice 2

Par linéarité de f, on peut écrire :

$$f^2 - 5f = -6\mathrm{id}_E \quad \text{donc} \quad f \circ \left(-\frac{1}{6}f + \frac{5}{6}\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{id}_E.$$

Notons $\varphi = -\dfrac{1}{6}f + \dfrac{5}{6}\mathrm{id}_E$. On a

- $f \circ \varphi = \mathrm{id}_E$.
- $\varphi \circ f = \left(-\dfrac{1}{6}f + \dfrac{5}{6}\mathrm{id}_E\right) \circ f = -\dfrac{1}{6}f^2 + \dfrac{5}{6}f = \mathrm{id}_E$

Donc f est bijective et sa réciproque est $\varphi = -\dfrac{1}{6}f + \dfrac{5}{6}\mathrm{id}_E$.

Exercice 3

1. Déterminons le noyau de f.
   Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
u\in\mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+\boxed{t}=0\\ 2x-y+z+t=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+\boxed{t}=0\\ \boxed{x}-2y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3y+z+\boxed{t}=0\\ \boxed{x}-2y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{t}=-z-3y\\ \boxed{x}=2y\end{cases}\\
&\Leftrightarrow u=y\underbrace{(2,1,0,-3)}_{u_1}+z\underbrace{(0,0,1,-1)}_{u_2}
\end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)\neq\{(0,0,0,0)\}$ donc f n'est pas injective.

2. Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. Soit $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f(u)=v &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+\boxed{t}=a\\ 2x-y+z+t=b\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+\boxed{t}=a\\ \boxed{x}-2y=b-a\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3y+z+\boxed{t}=2a-b\\ \boxed{x}-2y=b-a\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{t}=2a-b-z-3y\\ \boxed{x}=b-a+2y\end{cases}\\
&\Leftrightarrow u=(b-a+2y,y,z,2a-b-z-3y)
\end{aligned}$$

   Pour tout $v\in\mathbb{R}^2$, l'équation $f(u)=v$ admet au moins une solution donc f est surjective.
   Rq : on en déduit aussi que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

1. Déterminons $\mathrm{Ker}(f)$. Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
u\in\mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=0\\ x-4y=0\\ \boxed{x}+y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -5y=0\\ -5y=0\\ \boxed{x}+y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ x=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow u=(0,0).
\end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0)\}$ et f est injective.

2. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(u) = (1,1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - 4y = 1 \\ \boxed{x} + y = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -1 \\ -5y = 0 \\ \boxed{x} + y = 1 \end{cases}$$

   Les deux premières lignes sont incompatibles, il n'y a pas de solution. $(1, 1, 1)$ n'a pas d'antécédent.

3. Puisque $(1, 1, 1)$ n'a pas d'antécédent par f, f n'est pas surjective.