TD – AL7

Applications linéaires – ADC

ADC1

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3; (x,y,z)\mapsto(x+2y,x-y-2z,x+z)$;
   Soient $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(au+bv) &= f(\underbrace{ax+bx'}_{X},\underbrace{ay+by'}_{Y},\underbrace{az+bz'}_{Z})\\
&= f(X,Y,Z)\\
&= (X+2Y,X-Y-2Z,X+Z)\\
&= ((ax+bx')+2(ay+by')\ ,\ (ax+bx')-(ay+by')-2(az+bz')\ ,\ (ax+bx')+(az+bz'))\\
&= a(x+2y,x-y-2z,x+z)+b(x'+2y',x'-y'-2z',x'+z')\\
&= af(u)+bf(v)
\end{aligned}$$

   Donc f est bien linéaire.

2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\ ;\ (x,y,z)\mapsto(x-y+z,3x+1)$.
   Si f était linéaire, on aurait $f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^2}$. Or, $f(0_{\mathbb{R}^3})=f(0,0,0)=(0,1)\neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Donc f n'est pas linéaire.

3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ ;\ (x,y)\mapsto xy$. Montrons que f n'est pas linéaire. Soient $u=(1,1)$ et $a=2$. $f(au)=f(2,2)=2\times 2=4$ et $af(u)=2\times(1\times 1)=2$, donc $f(au)\neq af(u)$.
   f n'est pas linéaire.

4. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}\ ;\ (x,y,z,t)\mapsto x+y+z+t$;
   Soient $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3$, $v=(x',y',z',t')\in\mathbb{R}^4$ et $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(au+bv) &= f(\underbrace{ax+bx'}_{X},\underbrace{ay+by'}_{Y},\underbrace{az+bz'}_{Z},\underbrace{at+bt'}_{T})\\
&= f(X,Y,Z,T)\\
&= X+Y+Z+T\\
&= (ax+bx')+(ay+by')+(az+bz')+(at+bt')\\
&= a(x+y+z+t)+b(x'+y'+z'+t')\\
&= af(u)+bf(v)
\end{aligned}$$

   Donc f est bien linéaire.

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\ ;\ x\mapsto(x,2x,0)$;
   Soient $x,x'\in\mathbb{R}$ et $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\underbrace{ax+bx'}_{X}) &= f(X)\\
&= (X,2X,0)\\
&= ((ax+bx'),2(ax+bx'),0)\\
&= a(x,2x,0)+b(x',2x',0)\\
&= af(u)+bf(v)
\end{aligned}$$

   Donc f est bien linéaire.

6. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\ ;\ (x,y,z)\mapsto(x+y,z-x^2)$;
   Soient $u=(1,0,0)$ et $a=-1$: $f(au)=f(-1,0,0)=(-1,-1)$ et $af(u)=-1(1,-1)=(-1,1)$ donc $f(au)\neq af(u)$ et f n'est pas linéaire.

ADC2

1. Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(au+bv) &= f(\underbrace{ax+bx'}_{X}, \underbrace{ay+by'}_{Y}, \underbrace{az+bz'}_{Z}) \\ &= f(X,Y,Z) \\ &= (X+2Y-Z \ , \ X+Z) \\ &= \Big((ax+bx')+2(ay+by')-(az+bz') \ , \ (ax+bx')+(az+bz')\Big) \\ &= a(x+2y-z, x+z) + b(x'+2y'-z', x'+z') \\ &= af(u)+bf(v) \end{aligned}$$

   Donc f est linéaire.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(u) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2z=0 \\ x=-z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ x=-z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = (-z,z,z) \\ &\Leftrightarrow u = z\underbrace{(-1,1,1)}_{u_1} \\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(u_1) \end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u_1)$.

   Or, $u_1 \neq (0,0,0)$, donc (u_1) est libre et comme elle est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(u) = v &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=a \\ x+z=b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = z+\frac{a-b}{2} \\ x = b-z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = \left(b-z \ , \ z+\frac{a-b}{2} \ , \ z\right) \end{aligned}$$

   Pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, l'équation $f(u) = v$ admet au moins une solution.
   Ceci signifie que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

   On a aussi, suivant les calculs faits :

$$u = \left(x \ , \ -x+\frac{a+b}{2} \ , \ b-x\right) = \left(-y+\frac{a+b}{2} \ , \ y \ , \ y-\frac{a-b}{2}\right)$$

ADC3

L'énoncé dit que f est linéaire (pas besoin de le montrer donc).

- La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. D'après le cours, la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
- Déterminons alors une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\begin{aligned} v_1 &= f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1,3) \\ v_2 &= f(e_2) = f(0,1,0) = (-2,-1,-7) \\ v_3 &= f(e_3) = f(0,0,1) = (1,1,3). \end{aligned}$$

On voit que $v_3 = v_1$. Donc on peut écrire $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
De plus,

$$av_1 + bv_2 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ \boxed{a} - b = 0 \\ 3a - 7b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b = 0 \\ \boxed{a} - b = 0 \\ -4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0.$$

La famille (v_1, v_2) est libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

ADC4

Soit $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(u) = v &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = a \\ x - y - z = b \\ x + 5y + 3z = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y + z = a \\ -3y - 2z = b - a \\ 3y + 2z = c - a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = \frac{1}{3}z + \frac{a+2b}{3} \\ \boxed{y} = -\frac{2}{3}z - \frac{b-a}{3} \\ 0 = -2a + b + c \end{cases} \end{aligned}$$

Si $-2a + b + c = 0$, l'équation $f(u) = v$ admet au moins une solution.
Sinon, il n'y a pas de solution.
Ainsi,

$$v = (a,b,c) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow -2a + b + c = 0$$

On a

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + z = 0\}.$$

ADC5

- Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(au+bv) &= f(\underbrace{ax+bx'}_{X}, \underbrace{ay+by'}_{Y}, \underbrace{az+bz'}_{Z}) \\ &= f(X,Y,Z) \\ &= (2X+Y \ , \ X-Y+Z \ , \ X+Y) \\ &= (2(ax+bx')+(ay+by') \ , \ (ax+bx')-(ay+by')+(az+bz') \ , \ (ax+bx')+(ay+by')) \\ &= a(2x+y \ , \ x-y+z \ , \ x+y)+b(2x'+y' \ , \ x'-y'+z' \ , \ x'+y') \\ &= af(u)+bf(v) \end{aligned}$$

  Donc f est bien linéaire.

- Montrons que f est bijective.
  Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(u) = v &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=a \\ x-y+z=b \\ x+y=c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \dots \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=a-c \\ y=2c-a \\ z=-2a+b+3c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u=(a-c, 2c-a, -2a+b+3c) \end{aligned}$$

  Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $f(u) = v$ admet une unique solution $u \in \mathbb{R}^3$, donc f est bijective.

- Son application réciproque est donnée par $f^{-1}(a, b, c) = (a - c, 2c - a, -2a + b + 3c)$. On a donc

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-z, -x+2z, -2x+y+3z) \end{array} .$$